

## A matematikatanulás és -tanítás kutatásának fő áramlatai és távlatai

*Az oktatástudomány általában és különösen az oktatáslélektan az utóbbi évtizedekben hatalmas változásokon ment át, s jelenleg is fontos új fejlemények vannak születőben. Ezek a változások a terület alapvető orientáltságával, valamint elméleti és módszertani kérdésekkel és problémákkal kapcsolatosak. (1) A nemrégiben kiadott első Handbook of educational psychology áttekinti a szakma helyzetét, bár még mindig erősen az amerikai állapotra összpontosít. A lenyűgöző kötet utószavában a szerkesztők, Dave Berliner és Bob Calfee igen pozitív értékelést nyújtanak az oktatáspszichológia területéről. „Néhány megfigyelő már aggodalmát fejezte ki az oktatáspszichológusok kutatásban betöltött vezető szerepének hanyatlása miatt. Mi egészen másként látjuk a helyzetet a Handbook elolvasása után. Először is teljesen világos, hogy a mi kutatási területünk korábban és ma is igen termékeny és figyelemre méltóan hatásos... Jó úton haladunk. Az előző fejezetek meglepő ötletfrissességéről és lelkes próbálkozásokról tanúskodnak. A pszichológia mint tudományág a paradigmaváltás állapotában van, és az oktatáslélektan, mint ennek a tudományágnak a része, minden bizonnyal e fejlődés élvonalában található.” (2)*

**A**z oktatáspszichológiában az utóbbi húsz év legerőteljesebb fejleménye a növekvő tantárgy-orientáltság volt. Ezt tükrözi az is, hogy a *Handbook of educational psychology* III. része, *Az iskolai tanterv és pszichológia* hét fejezetet tartalmaz. Ahogy a *Handbookban* Shulman és Quinlan is írja *A tantárgy számít* című fejezetben: „...a 21. század felé közeledve előre megjósolhatjuk, hogy az oktatáspszichológiában visszatér a tantárgypszichológia központi szerepe.” (3)

A matematikatanulás és -oktatás területe a legvilágosabb példája a tanulás- és oktatáskutatás tantárgy-orientáltságának. Valóban, amióta ez az 1970-es években felszínre került, ezen a területen hatalmas kutatómunka folyt. Még 1990 körül megjelent a kutatás átfogó, bár erősen Amerika-orientált szintézise *Handbook of research on mathematics teaching and learning* címen. (4) Nemzetközibb, bár kevésbé átfogó áttekintést nyújt a *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* című munka. (5) Felfrissített helyzetképet ad a szakmáról az *International handbook of mathematics education 1–2.* és a *Theories of mathematical learning* (6), amely a VII. Nemzetközi Matematikaoktatási Konferencia egyik munkacsoportjának munkáján alapul. A terület szelektív áttekintése megtalálható a *Handbook of educational psychology* III. részének egyik fejezetében is. (7)

A matematikatanulás és -oktatás kutatásának fejlesztéséhez és formálásához két csoport járult hozzá:

a) főleg olyan pszichológusok, akik a tanulás, fejlesztés és tanítás alapvető kérdéseinek vizsgálatához a matematikát mint tantárgyi tartalmat használják;

b) olyan tudósok, akiket elsősorban a matematikaoktatás érdekel és kutatásaikhoz az oktatás- és fejlesztépszichológia elméleti koncepcióit és módszertani eszközeit használják fel. Míg a két csoport közötti kommunikáció kezdetben meglehetősen merev volt, kapcsolatuk az évek során eredményesebb együttműködéssé fejlődött, amit más szakterületek, például az antropológia és interkulturális kutatások is gazdagítottak. E közösségen belül kialakult a matematikatanulás egy olyan új és kibővített koncepciója, amely magában foglalja a valóság modellezésén alapuló jelentés és megértés (társadalmi) konstrukcióját, a mintaelemzést, és egy matematikai képesség elsajátítását.

Ugyanebben az időszakban a matematikaoktatás tanulmányozásában részt vevő csoportok együttműködése fontos hangsúlyeltolódásokat segített elő a matematikatanulás és -oktatás elméleti és módszertani megközelítésében: az általános irányultságtól a tantárgyspecifikus tudás, folyamatok és szakértelem felé; az egyes tanulóra való figyeltől a társadalmi és kulturális tényezők felé; a „hideg” megismeréstől a „meleg” felé; a laboratóriumi kutatástól az osztálytermi kutatás felé; és egy főként mennyiségi, kísérleti megközelítéstől egy változatosabb módszertani eszköztár felé, ami magában foglal minőségi és értelmező technikákat is.

Jelen tanulmány a matematikatanulás és -tanítás kutatásának néhány fő áramlatát és jövőbeli lehetőségeit tárgyalja olyan kutatási példákat mutatva be illusztrációként, amelyeket a belgiumi Löveni Egyetem Oktatápszichológiai és Technológiai Központjában (CIP&T) végeztünk el. A cikk szerkezete olyan lényeges elemeket követ, amelyek elkülöníthetők az oktatáson keresztül való tanulás elméletében: egy matematikai képesség elsajátítása mint végső cél; konstruktív tanulás mint a cél elérésének eszköze; hatékony tanítási-tanulási környezet mint segítség. A tanulmány célja az is, hogy figyelmet szenteljen annak a problémának, amit a kutatás és az osztálytermi gyakorlat közötti szakadék áthidalása jelent.

### A matematikai képesség elsajátítása mint az oktatás végső célja

#### *A matematikai képesség több, mint a tudás és a készségek összessége*

A különböző tantárgyak, köztük a matematika terén való jártasság gondos elemzése meggyőzően bizonyította, hogy az új, ismeretlen problémák megoldásában és a kihívást jelentő tanulási feladatok megközelítésében való illetékesség négy képességek kategória együttes birtoklását tételezi fel, nevezetesen a tantárgyspecifikus tudást, heurisztikus módszereket, metakognitív tudást és készségeket, valamint olyan érzelmi tényezőket, mint például a meggyőződés, szellemi beállítottság és érzelmek. (8) Bár miközben e négy kategória összefüggő ismerte mindenképpen szükséges, még ez sem elég a tehetetlen tudás jól ismert jelenségének a legyőzésére, ami azt a tudást jelenti, amely rendelkezésre áll, de használhatatlan a tanulásban és a problémamegoldó helyzetekben. Ez utóbbihoz szükség van egy matematikai képességre, amely egy bizonyos magatartásforma alkalmazásának képességén kívül magában foglalja az arra való hajlandóságot is, ugyanúgy, mint azt az érzékenységet, amely lehetővé teszi azoknak a helyzeteknek a felismerését, amikor ezek alkalmazása helyes. Például fontos, de nem elég a diáknak, hogy becslési készségeket elsajátítson; azokat a problémahelyzeteket is meg kell éreznie, amikor ezek alkalmazhatók és hasznosak, sőt mi több, hajlandóvá kell válni ezek használatára, amikor ez szükségesnek látszik. (9) Az Amerikai Matematikatanárok Országos Tanácsa a matematikai képességet a következőképpen határozta meg: „A matematikatanulás több, mint fogalmak, folyamatok és ezek alkalmazásának megtanulása. Egy matematikai képesség kifejlesztését is jelenti és azt, hogy a matematikát hatékony helyzetfelismerési módszernek tekintjük. A képesség nemcsak szellemi beállítottságot jelent, hanem a pozitív módon való gondolkodásra és cselekvésre való hajlamot is. A tanulók matematikai képessége megnyilvánul abban, ahogy a feladatokat megközelítik – hogy magabiztosak-e, hogy hajlandóak-e alternatívákat kipróbálni, hogy kitartóak és érdeklődőek-e –, és abban, hogy tükröztetik-e mindezt a gondolkodásukban.” (10)

Nyilvánvaló, hogy ilyen képességeket nem lehet közvetlenül tanítani, hanem annak a diákok iskolai pályafutása során kell kialakulnia, ezért állandó oktatási figyelmet igényel.

Lehetetlen itt kifejteni a matematikai képesség összes aspektusát; ezért – példákon keresztül – egyrészt a tantárgyspecifikus tudásra, másrészt a különböző meggyőződésekre összpontosítom a figyelmem.

*Fő változások a matematika-tanterv tantárgyspecifikus ismeretanyagában*

A képességeknek a matematikaoktatás végső céljaként való megjelenése együtt járt a matematikának mint tantárgynak az újrafogalmazásával. Régebben a tantárgyat feladatmegoldó képességek, valamint statikus és elszigetelt fogalmak hatalmas gyűjteményének tekintették, ma inkább értelmező és problémamegoldó tevékenységet látnak benne. Ez a világszerte elterjedt új tantárgykoncepció és a matematikai kompetencia képességek központú felfogása fontos hangsúlyeltolódásokhoz vezet az iskolai tantervekben. (11) Például az általános iskolai matematika-tanterv újragondolásának legszembetűnőbb eredménye, hogy kevesebb hangsúlyt kap benne az írásbeli algoritmusok automatizált elsajátítása, és nagyobb figyelmet szentelnek más számítási eljárásoknak, a számrendszer fogalmi megértésének és az alpműveleteknek. Pontosabban, ma azt húzzák alá, hogy a matematikának az eddiginél jobban kell fejlesztenie a számfogalmat és a számérzékét a gyerekekben. A tantervekben nagyobb figyelmet szentelnek:

- a számolásnak a (Piaget-féle) logikai műveleti készségek rovására;
- a szám többféle használati lehetőségei tudatosításának;
- a tízes számrendszer jobb megértésének;
- a számérzéknek és a becslésnek;
- a nem egész számok megértésének és használatának (törtek, százalékok, arányok).

A négy alpművelettel kapcsolatban a legfőbb hangsúlyeltolódások a következőkben nyilvánulnak meg. Nagyobb figyelmet szentelnek:

- az értelmezésnek és megértésnek azáltal, hogy a tanulókat a műveleti modellhelyzetek nagyobb körével szembesítik és hogy gazdag és rugalmas külső ábrázolásvariációkat használnak a helyzetek és műveletek közötti fogalmi kapcsolatok összekötésére;
- a fejszámolásnak és a számoló- vagy számítógép megfelelő használatának az írásban való számolás rovására;

– a szóbeli feladatmegoldásnak különféle feladattípusok használatával, köztük nem rutin feladatokkal, mint például olyan problémák, amelyekhez a megfelelő modell vagy megoldás sem nem nyilvánvaló, sem nem kétségbevonhatatlan. (12)

További kutatásokra van szükség ahhoz, hogy az osztálytermi gyakorlat képes legyen követni az általános iskolai tantervek tantárgyspecifikus ismeretanyagában bekövetkező változásokat. Igazából a fent felsorolt témakörök tanításában és tanulásában lezajló folyamatok közül ma még sokat nem értünk jól. Ez érvényes például a számérzékre, ami nagyjából a számok és kapcsolataik jó megérzését jelenti, de amiről még nincs megfelelő definíciónk. (13) Körülbelül ez a helyzet a becsléssel és a fejszámolással is. Sowder 1992-ben a következőképpen jellemezte a szakma helyzetét: „A számérzékkel, a számtani becsléssel és a fejszámolással foglalkozó kutatók egyetértenek ezen témák fontosságában, de nem szükségszerűen vallanak azonos nézeteket abban, hogy melyek a legfontosabb kutatási kérdések, hogyan kellene a kutatásnak haladnia és hogyan kellene ezeket a témákat a tantervekbe beépíteni.”

Sowder háromféle becslési kategóriát különböztet meg: számítási becslést, mérési becslést és sokaságra vonatkozó becslést. Saját kutatásainkban nemrégiben foglalkoztunk a sokaságra vonatkozó becsléssel, azzal a kategóriával, melyet ez idáig nem igazán kutattak. (14) Az első vizsgálatban (15) az előfordulási becslés adaptív stratégiájának kifejlesztésére figyeltünk a stratégiai változás elméleti perspektívájából. (16) Három különböző korcsoportnak adtunk fel egy egyszerű becslési feladatot: 20 egyetemi hallgatónak (20–22 évesek), 20 hatodikosnak (11–12 évesek) és 10 másodikosnak (7–8 évesek). Becslést kellett végezniük 100, egy 10x10-es négyzetrácsban elhelyezett, színes tömbök által reprezentált sokaságra vonatkozó-

an. Általában véve ez a feladat két különböző becslési eljárást tesz lehetővé: vagy folyamatosan összeadjuk a tömbcsoportok megbecsült számát (=összeadási módszer), vagy kivonjuk a becslött üres négyzetek számát a rács (megbecsült) összes négyzetének a számából (=kivonásos módszer). A racionális feladatelemzés azt mutatja, hogy a leghatékonyabb becslési stratégia mindkét módszer adaptív felhasználásából adódik össze, attól függően, hogy mi a tömbök aránya az üres négyzetekhez képest.

Az volt a feltételezésünk, hogy a két módszer adaptív felhasználásában fejlődési növekedés lesz kimutatható és hogy ez az adaptív felhasználás pontosabb becslést fog eredményezni. A különböző típusú adatokból (pl. válaszadási idők, hibaszázalékok és visszatekintő beszámolók) egybehangzó bizonyítékok támasztották alá mindkét hipotézist. Módszertani szempontból a tanulmány megmutatta, hogy *Beem* „szegmentációs elemzése” alapján lehetséges a kísérleti alanyok különböző módszerek közötti adaptív választásainak elkülönítése kognitív feladatokban, és a választások és teljesítmény közötti kapcsolat vizsgálata is.

*A matematikatanulással és feladatmegoldással kapcsolatos meggyőződések elemzése*

A „hideg”-tól a „meleg” megismerés felé való eltolódás eredményeképpen általában, valamint a matematikatanulás és -tanítás tanulmányozásában különösen, a kutatók nemrégiben elkezdték tanulmányozni a matematikával mint tantárggyal, és a matematikai problémamegoldással, matematikatanulással és -tanítással kapcsolatos meggyőződések. (17) Schoenfeld például kimutatta (18), hogy középiskolai matematikaórákon, ahol a tanítás színvonalát általában jónak tartják, a diákok mégis olyan furcsa és helytelen elképzelésekkel rendelkeznek a matematikai problémamegoldásról, mint például, hogy „szerencse kérdése, ha meg tudsz oldani egy matek feladatot”, vagy „egy kiadott matek feladatot öt perc alatt meg kell tudni oldani”.

Az utóbbi években egészen különböző módokon tanulmányoztunk az általános iskolai matematikaoktatással kapcsolatos kétféle meggyőződést, nevezetesen a gyerekek és a gyakorló tanárok elképzeléseit a világról meglévő ismeret szerepéről az iskolai szöveges feladatok matematikai modellezésében, és a tanárok ismeretelméleti meggyőződéseit a matematikáról mint tantárgyról, valamint a matematika tanulásáról és tanításáról.

*A világról meglévő ismeretek és a gyerekek szöveges feladatmegoldása*

Az első kísérletben (19) 75 ötödik osztályos tanuló oldott meg egy tíz pár szöveges feladatból álló tesztet. Mindegyik feladatpár tartalmazott:

a) egy olyan standard vagy rutin feladatot, amit megfelelően lehet modellezni és megoldani egy vagy két számtani művelettel az adott számokkal (pl. „Chris gyalogtúrát tett. Dél előtt megtett 8 km-t, délután 15 km-t. Hány km-t ment Chris összesen?”);

*A „hideg”-tól a „meleg” megismerés felé való eltolódás eredményeképpen általában, valamint a matematikatanulás és -tanítás tanulmányozásában különösen, a kutatók nemrégiben elkezdték tanulmányozni a matematikával mint tantárggyal, és a matematikai problémamegoldással, matematikatanulással és -tanítással kapcsolatos meggyőződések. Schoenfeld például kimutatta, hogy középiskolai matematikaórákon, ahol a tanítás színvonalát általában jónak tartják, a diákok mégis olyan furcsa és helytelen elképzelésekkel rendelkeznek a matematikai problémamegoldásról, mint például, hogy „szerencse kérdése, ha meg tudsz oldani egy matek feladatot”, vagy „egy kiadott matek feladatot öt perc alatt meg kell tudni oldani”.*

b) és egy olyan nem rutinfeladatot, ahol a megfelelő matematikai modell vagy megoldás se nem egyértelmű, se nem vitathatatlan, legalábbis, ha valaki teljesen komolyan veszi a feladatban leírt helyzet realitását (pl. „Bruce és Alice ugyanabba az iskolába járnak. Bruce 17 km-re lakik az iskolától, Alice pedig 8-ra. Milyen messze lakik Bruce és Alice egymástól?”).

A teszt eredményei megerősítették azt az elképzelésünket, hogy a diákok hajlamosak kizárni a világról meglévő ismereteiket, amikor nem rutinfeladatokkal találják szembe magukat és következésképpen rutinból oldják meg őket (pl. az iskolától való távolság problémáját úgy oldják meg, hogy vagy a két szám összegét adják meg, vagy a különbségét, ahelyett, hogy különböző szituációs modellek vagy megoldások lehetőségét keresnek). Igazából a tíz nem rutinfeladatra adott válaszok mindössze 17%-a tekinthető valóságghűnek, vagy mert valóságghű választ születtett rájuk, vagy mert a nem valóságghű választ valóságghű magyarázat kísérte. Két másik kísérlet megmutatta, hogy az ötödikesek meggyőződése arról, hogy a világról való ismeretek irrelevánsak a szöveges feladatok modellezésében és megoldásában, igen erőteljes és ellenáll minden változásnak, s ez a meggyőződés legalább olyan erős volt a japán, mint a flamand diákok esetében. Ezen túlmenően, a negyedik vizsgálatban kiderült, hogy a gyakorló tanárokat is mélyen érinti ez a (téves) elképzelés, bár őket valamelyest kevésbé. Lehetséges, hogy egy ilyen meggyőződés a (jövendő) tanárokból részben magyarázhatja azt a tendenciát a tanulók körében, hogy nem valóságghű modellezést és feladatmegoldást követnek. (20) Eredményeinket más európai országokban elvégzett kutatások egybehangzó bizonyítékai is erősítik (l. a Learning and Instruction tematikus számát, Greer szerkesztésében, sajtó alatt). Az a megállapítás, hogy a (téves) meggyőződés ugyanúgy jellemző a japán, mint a flamand gyerekekre, felveti azt az érdekes kérdést, vajon a matematikaóra gyakorlata és kultúrája Európában és Japánban lényegében inkább egyforma-e, mint a különböző, látszólagos tantervi és oktatási eltérések, annak ellenére, hogy nagyon is távoli kultúrákban gyökereznek. További kutatás egészítheti ki a már rendelkezésre álló tanulmányokat az amerikai és kelet-ázsiai gyerekek összehasonlításáról, amelyek közül számos dolgozat lényeges különbségekről tanúskodik. (21) A tanácskozáson *A világról szerzett ismeretek és a szöveges feladatok modellezése az iskolákban* című szimpózium keretén belül új vizsgálatokról számoltunk be, amelyek célja az, hogy részletesen megvilágítsák a gyerekek modellezési nehézségeit. Két előadás a központ legutóbbi kutatásaival foglalkozik, az egyikben a geometriai formákkal való arányossági érvelésben meglévő linearitás illúziójáról esik szó, a másikban a tő- és sorszámnevekkel kapcsolatos összeadási problémákról.

#### *A tanárok ismeretelméleti meggyőződései a matematikaoktatásról*

Lehetséges, hogy a tanárok ismeretelméleti meggyőződései a matematikáról mint szakterületről és a matematika tanulásáról és tanításáról befolyásolják diákjaik meggyőződéseinek fejlődését. Nem állítom, hogy a tanárok közvetlenül adják át ezeket a meggyőződéseket a diákoknak, hanem egy bizonyos fajta kölcsönhatáson keresztül, amit a tanárokkal való kapcsolat eredményez, hiszen a tanárok tanítási gyakorlata tükrözi meggyőződéseit, ezért érdemes elemezni őket. Megfelelő eszközök hiányában, először összeállítottunk egy ismeretelméleti meggyőződésekkel kapcsolatos kérdőívet, amely két általános témához kapcsolódott és tíz alrendszer tartalmazott: a matematikát mint tantervi szakterületet (négy alrendszer), valamint a matematika tanulását és tanítását (hat alrendszer). Az első kérdőív egy hetven állításból álló, Likert-típusú skála volt, melyet 871 tanár töltött ki 184 flamand általános iskolából (pl. „A matematika meghatározott tudásanyagból áll, amit nemzedékről nemzedékre kell átadni a tanítás során”; „A tanároknak arra kell biztatniuk a diákokat, hogy saját maguk találjanak megoldásokat a matematikai feladatokra”). Az adatok előzetes elemzésének eredményei a következőket mutatják: Itemanalízis alapján a hetven íteimből huszonháromat töröltünk. A megmaradó ítehmalmaz alapján varimax rotációval elvégzett faktoranalízis három szignifikáns eredményt hozott: „értelmes és realiztikus matematikaoktatás kontra nem realiztikus” (Cronbach alfa = 0.81); „a matematika mint rugalmas rendszer kontra merev rendszer” (alfa =

0.73); „a matematika mint hasznos szakterület kontra absztrakt szakterület” (alfa = 0.77). A „nemek” és a „tanítási évek száma” független változókkal elvégzett variancia-analízis feltárt néhány érdekes, szignifikáns, bár nem túl erős hatás. Először is, a nők magasabb pontszámokat értek el az első tényező esetében („értelmes és realisztikus matematikaoktatás”); másodsorban a tizenöt évnél kevesebb ideje tanítók magasabbra értékelték a második („a matematika mint rugalmas rendszer”), míg az annál hosszabb gyakorlattal rendelkezők a harmadik tényezőt („a matematika mint hasznos szakterület”). Alá kell húzni, hogy ez még csak egy kezdeti szakaszban lévő tanulmány és szándékunkban áll tovább vizsgálni a matematikához kötődő ismeretelméleti meggyőződéseket, nemcsak tanárok, hanem diákok esetében is.

### A konstruktív tanulás mint a cél elérésének eszköze

Ahogy már a bevezetőben is említettük, az utóbbi néhány évtized kutatásai a matematikatanulás új elméletét eredményezték: e szerint a matematikatanulás a valóság modellezésén alapuló jelentés és megértés (társadalmi) konstrukciója, mintaelemzés, és egy matematikai képesség kifejlesztése. A koncepció szerint a hatékony matematikatanulás önszabályozó, szituációs, és együttműködő. (22)

#### *Mit építünk fel a konstruktív tanulási folyamatok során?*

A tanulás konstruktivista felfogásában manapság az oktatáspszichológusok többé-kevésbé megegyeznek. (23) Ám először meg kell határoznunk, hogy pontosan mit is jelent ez. Komoly bizonyítékok vannak arra, hogy a tanulás bizonyos értelemben mindig konstruktív, még olyan tanulási környezetben is, amely alapvetően az ismeretátadásra épül. Ezt meggyőzően bizonyítják azok a kutatási eredmények, amelyek megmutatják a téves elképzelések (mint például „a szorzás nagyobbá tesz”) és hibás műveleti készségek előfordulását a hagyományos matematikaórákon részt vevő gyerekek körében. *Hatano* érvelése szerint „nagyon kicsi a valószínűsége, hogy a gyerekeknek tanították ezeket”. (24) A konstruktivista tanuláselméletben az a lényeg, hogy a tanulót a környezettel való kölcsönhatás során figyelmesen és erőfeszítést igénylően bevonjuk a tudás- és készségelsajátítási folyamatba. Ebben a tekintetben egyetértek *Greer*rel, hogy nem a matematika tartalmát kell újraalkotni, hanem a matematikatanítás folyamatát. (25) Mindazonáltal, ahogy *Denise Phillip* írja *A Jó, a Rossz és a Csúf – A konstruktivizmus számos arca* című cikkében (26), a szakirodalomban sokféle konstruktivizmus-meghatározás létezik, amelyek elméleti és ismertelméleti perspektívák széles körén ívelnek át és jó néhány fontos szempontból különböznek egymástól. Jelenleg semmiképpen sem állíthatjuk, hogy jól kidolgozott és kutatásokra alapozott konstruktivista tanuláselmélettel rendelkezünk. *Fischbein* érvelése szerint nyilvánvalóan szükséges „a konstruktivizmusnak mint a matematikaoktatás pszichológiai modelljének pontosabb meghatározása”. (27) Ez annál is inkább így van, mert a jelenleg hozzáférhető konstruktivista tanulási elméletek nem nyújtanak hasznos elveket a megfelelő tanulási-tanítási környezet megtervezéséhez. (28) Más szóval, a szakma jelenlegi helyzete további elméleti és empirikus kutatásokat tesz szükségessé, amelyeknek az a célja, hogy jobban megértsük és behatóbban elemezzük a tudás, a metakognitív stratégiák és a teljesítmény érzelmi elemeinek elsajátításához szükséges konstruktív tanulási folyamatoknak a lényegét, valamint az ilyen tanulási folyamatokat előhívó és elősegítő oktatás szerepét és természetét.

#### *Önszabályozás: a konstruktív tanulás fő eleme*

Mivel a konstruktivizmus középpontjában a tanulás folyamata és nem az eredménye áll, ez azt is jelenti, hogy a konstruktív tanulás önszabályozó. Az „önszabályozás” arra utal, hogy „milyen mértékben képesek az egyének metakognitív, motivációs és viselkedéstani szempontból aktív részesei lenni a tanulási folyamatnak”. (29) Bár a tanulás önszabályozásával kapcsolatos kutatások csupán tíz évvel ezelőtt kezdődtek, máris jelentős tapasztalatokat halmoztak fel. (30) Először az önszabályozó tanulók legfontosabb tulajdonságait azonosították: jól beosztják a ta-

mulásra szánt időt, jelentősebb konkrét és általános célokat tűznek maguk elé, gyakrabban és pontosabban ellenőrzik magukat, magasabb az elégedettségi küszöbük, hatékonyabbak és az akadályok ellenére is kitartóak. (31) Továbbá, több szakterületen, így a matematikában is bebizonyosodott, hogy az önszabályozás mértéke szorosan összefügg a tanulmányi eredménnyel (32), és hogy az önszabályozó folyamatok hatását megfelelő beavatkozással növelni lehet. (33) Mindazonáltal nagy szükség van további kutatásokra, hogy jobban megértsük azokat a fontos folyamatokat, amelyek szerepet játszanak az iskolai tanulás hatékony szabályozásában, továbbá, hogy nyomon kövessük a diákokban a szabályozási készség fejlődését, és felfedjük, hogyan és milyen oktatási feltételek mellett válnak a diákok egyre inkább önszabályozó tanulókká, más szóval, hogyan tanulják meg szervezni és ellenőrizni saját tudásépítő és készségsajátító folyamataikat, vagy hogyan fokozható a külső szabályozásból az önszabályozásba való átmenet. Az utóbbi szempontoz kapcsolódik a tantárgyspecifikus tudás és az önszabályozás közötti kölcsönhatás kérdése: egy adott szaktárgy tanulásának (sikeres) szabályozása megkívánja-e, hogy azon a területen bizonyos fokú kompetenciával rendelkezünk? (34)

#### *Szituációs matematikatanulás, és ami ezen túl van*

A matematikaoktatásban résztvevők széles körben osztják manapság azt a nézetet, hogy a konstruktív és önszabályozó tanulási folyamatoknak lehetőség szerint a megfelelő kontextusban kellene lezajlaniuk, vagyis azokkal a társadalmi, kontextuális és kulturális környezeti tényezőkkel összefüggésben, amelyekben ezek a folyamatok végbemennek és amelyek hatással vannak rájuk. Az 1980-as évek végén a tanulás kontextuális tényezőinek fontosságát előtérbe helyezte a szituációs megismerési és tanulási paradigma, ami azzal a nézettel szemben látott napvilágot, mely szerint a tanulás és gondolkodás szellemi cselekvés, s mint ilyen, erősen egyéni és pusztán a fejben lezajló megismerési folyamat, amely skatulyába zárt fogalmi képzetek konstrukcióját eredményezi. (35) Általában véve, a szituációs elmélet joggal hangsúlyozza, hogy a tanulás lényegében a társadalmi és kulturális környezettel és tárgyakkal való kölcsönhatás során megy végbe. (36) Ez a szituációs elmélet egy autentikusabb és valóság-hűbb matematikaoktatás felé való elmozdulást segítette elő. Mindazonáltal Gruber, Law, Mandl és Renkl érvelése szerint, a szituációs megismerési mozgalom még mindig csak „egy laza szálakkal összekötött gondolkodási rendszer” (37), melyet gyakran ért bírálat pontatlan és túlzó kijelentéseiért, amelyekből alkalmatlan oktatási következtetéseket vontak le. (38) Ezenkívül, a matematika kettős természete miatt – azaz egyrészt valóságalapja és a gyakorlati problémák megoldására való hasznossága, másrészt elvontsága miatt – a matematikaoktatás a formális, fogalmi tudás elsajátítására kell hogy törekedjen, ami túllép a konkrét szituáción, amelyben először elsajátították. Mindezt figyelembe véve teljesen nyilvánvaló, hogy nagy szükség van további elméleti és tapasztalati kutatásra, amely mind a kognitív pszichológia, mind a szituációs elmélet pozitív elemeit egyesítve új szintézist teremthet. E tekintetben Stella Vosniadou álláspontjával értek egyet: „A szellem és a kultúra visszaemelése a megismerés tanulmányozásába fontos fejlődési fok a tanulás tudományos tanulmányozásának irányába.” (39)

Nehéz, de érdekes kutatási téma ebben az összefüggésben a transzfer kérdése. Tulajdonképpen a tanulás szituációs jellegének hangsúlyozása egyidejűleg vezet a transzfer fontosságának, sőt lehetőségének csökkenéséhez. Bár Andersonék érvelése szerint, miközben a szakirodalom azt mutatja, hogy a transzfer drámai kudarcokon jutott túl, hatalmas sikerekről is beszámol. (40) Hatano szerint, a szakértelem növekedését a tudás kontextusból való kiemelése jellemzi, jobban alkalmassá téve azt az átvitelre. (41) Ezért aztán a transzfer tanulmányozása jó alkalmat teremt a megismerés és a szituáció szintézisének keresésére.

#### *Elmozdulás az együttműködő, megosztott tanulás irányába*

Már említettük ennek a fejezetnek az elején, hogy az új nézet szerint a matematikatanulás a tudás társadalmi konstrukciójának tekintendő, s a tanulás együttműködő jellege is beleérthető a szituációs elképzelésbe. A szituációs elmélet valóban hangsúlyozza a tanulás tár-

sadalmi jellegét. Ez azt jelenti, hogy a tanulás nem csupán „magányos” tevékenység, hanem lényegében megosztott, vagyis a tanulásra tett erőfeszítések megoszlanak a diákok, a tanulási környezetben lévő partnerek, valamint a rendelkezésre álló (műszaki) források és az eszközök között. A tanulás mint társadalmi folyamat koncepciója központi szerepet tölt be az ún. társadalmi konstruktivizmusban; ez a magyarázat arra a megfigyelésre, hogy a tudásépítés idioszinkratikus folyamatainak ellenére a tanulók közös fogalmakat és készségeket sajátítanak el. (42) Wood, Cobb és Yackel például lényegesnek tekinti a társadalmi kölcsönhatást a matematika tanulásához, azzal, hogy az egyéni tudás konstrukciója a kölcsönhatás, tárgyalás és együttműködés összes folyamatában előfordul. (43) A rendelkezésre álló szakirodalom kétségkívül számos bizonyítékot hoz az együttműködő tanulásnak a tanulmányi eredményre gyakorolt pozitív hatásairól (44), és az sem kétséges, hogy a matematikaórákon a nagyobb társadalmi kölcsönhatás irányába való elmozdulás érdemleges lépés lenne az egyéni tanulás hagyományos túlhangsúlyozásától való eltávolodásra, de számos kérdés megválaszolatlan marad a kis csoportokban történő, együttműködő tanúlással kapcsolatban. Webb és Palincsar szerint az eddigi kutatás leglényegesebb eredménye, hogy felismerte a kis csoportokban történő feladatmegoldás és tanulás megtervezésének, megvalósításának és értékelésének nehézségeit. (45) Ezek miatt nehéz következtetéseket levonni a hozzáférhető tanulmányokból. Például jobban kellene értenünk, hogy a kiscsoportos tevékenységek hogyan befolyásolják a diákok tanulását és gondolkodását, milyen szerepet játszanak az egyéni különbségek a csoport munkájában és milyen mechanizmusok működnek a csoportfolyamatok közben.

Összefoglalóan elmondható, hogy az eddigi kutatások már meglehetősen jól alátámasztják azt a nézetet, hogy a hatékony és érdemleges matematikatanulás a tudásépítés és készségelsajátítás konstruktív, önszabályozó, szituációs és együttműködő folyamata. Mindazonáltal ennek a helyzetnek nem szabadna egyfajta önelégültséghez vezetnie a matematikaoktatás kutatóinak körében, hanem arra kellene ösztönöznie mindenkit, hogy folytassa eddigi törekvéseit. Az eddigi eredmények ellenére, az előbbi rövid elemzés azt mutatja, hogy számos bonyolult kérdés és probléma vár tanulmányozásra és megoldásra, azzal a céllal, hogy kidolgozzuk a matematikatanulás azon folyamatainak alaposabb magyarázó elméletét, amelyek lehetővé teszik a matematikai képességek elsajátítását.

#### *A tanulók és tanárok tanulásról való elképzelésének elemzése*

A tudás- és készségelsajátítás új koncepciójának alkalmazási lehetőségét figyelembe véve érdekes feltenni azt a kérdést, hogy a tanárok és diákok elképzelései a tanulásról milyen mértékben vágnak egybe a konstruktivista megközelítéssel. Berry és Sahlberg ezt a kérdést tárgyalták egyik tanulmányukban, bár általános módon, s nem a matematikatanulásra összpontosítva. (46) A kutatók kiindulásképpen az én modellemt követték, amely szerint a jó tanulás a tudás és jelentés felépítésének konstruktív, kumulatív, önszabályozó, célirányos, szituációs és együttműködő folyamata. (47) Ezt a modellt használták fel egy

*Már említettük ennek a fejezetnek az elején, hogy az új nézet szerint a matematika-tanulás a tudás társadalmi konstrukciójának tekintendő, s a tanulás együttműködő jellege is beleérthető a szituációs elképzelésbe. A szituációs elmélet valóban hangsúlyozza a tanulás társadalmi jellegét. Ez azt jelenti, hogy a tanulás nem csupán „magányos” tevékenység, hanem lényegében megosztott, vagyis a tanulásra tett erőfeszítések megoszlanak a diákok, a tanulási környezetben lévő partnerek, valamint a rendelkezésre álló (műszaki) források és az eszközök között.*



olyan kérdőív kifejlesztésére, amely öt angol és finn iskola 193 (15 éves) tanulójának elképzeléseit mérte és elemezte a tanulásról. A kérdőív három részből állt: egy kiegészítő kérdésből (Mi a tanulás?); egy metaforikus feladatból (négy közül az egyik kép kiválasztása, amely a legjobban jellemez egy tanulási helyzetet); és egy tizenöt állításból álló Likert-típusú skálából (pl. „Többet tanulok, ha a többi diákkal együtt dolgozom”). A tanulmány egyik legfontosabb eredménye, hogy a „Legtöbb diáknak olyan tanulási elképzelései vannak, amelyeket legjobban a transzmissziós modellel lehet jellemezni és elég nehéz beilleszteni De Corte modelljébe... Ez azt jelenti, hogy diákjaink tanulásról és tanításról alkotott elképzelései az iskola statikus és zárt gyakorlatát tükrözik”. Berry és Sahlberg ehhez hozzátesszik, hogy ez az általános iskolai tanulókkal kapcsolatos eredmény összhangban van a tanárokkal és felnőtt diákokkal elvégzett vizsgálatok eredményével.

Visszatekintve e fejezetre, arra a következtetésre jutunk, hogy a matematikatanulási folyamatok mélyreható elemzése a matematikaoktatás kutatásának fő irányvonalába tartozik, s annak most is meghatározó része, és a jövőben is az lesz.

#### *Hatékony tanítási-tanulási környezet mint segítőeszköz*

A tanuláshoz mint konstruktív, önszabályozó, szituációs és megosztott tevékenységnek a tanulmányozása párhuzamosan kell hogy haladjon egy másik, kihívást jelentő irányzattal a matematika-oktatás kutatásában. Ez azoknak az elvi kereteknek a koherens és kutatásra alapozott kifejlesztése és bizonyítása, amelyek alkalmazhatók a hatékony tanulási környezet megtervezésére, vagyis olyan oktatási háttér megteremtésére, amely a diákokban elősegíti azoknak a megfelelő elsajátítási folyamatoknak az elindulását és továbbhaladását, melyek előmozdítják a célul kitűzött matematikai képesség elérését. Nyilvánvaló, hogy ehhez tanítási kísérletek elvégzésére van szükség. Álláspontom szerint, miközben az ilyen intervenciós kutatás helytálló és hasznos a matematikatanítási gyakorlat optimalizálására, elsődleges célja, hogy hozzájáruljon a tanításon keresztül történő matematikatanulás elméletének alaposabb magyarázatához. Ebben az összefüggésben ígéretes stratégiának tűnik, hogy „létrehozzunk és értékeljünk olyan valószerű osztálytermi környezetet, amelyben összetett oktatási beavatkozás zajlik, s ami képviseli jelenlegi felfogásunkat a hatékony tanulási folyamatokról és tanulási környezetekről”. (48) A következőkben felvázolok öt tervezési elvet a hatékony tanulási környezet kialakítására, amelyek a fent leírt hatékony tanulási folyamatok sajátosságaiból adódnak, ugyanakkor egybevágnak a matematikai kompetencia képességközpontú elméletével. Ezután beszámolok egy Lövenben folytatott kísérletről.

#### *Tervezési elvek a hatékony tanulási környezet kialakítására*

A hatékony tanulási környezet kialakításának öt vezérelve, melyek a matematikai képességről és a konstruktív matematikatanulásról jelenleg vallott elképzeléseinket tükrözik, a következők:

1. A tanulási környezetnek aktív, konstruktív elsajátítási folyamatokat kell elindítania a diákokban, még a passzívokban is. Fontos azonban azt is hangsúlyozni, hogy a tanulásról mint aktív folyamatról alkotott nézet nem jelenti azt, hogy a diákokat saját tudásuk felépítéséhez nem lehet hozzásegíteni és rávezetni arra alkalmas beavatkozással, mint például a tanárok, az osztálytársak és az oktatási médiák által nyújtott modellezés, oktatás és támogatás. (49) Tulajdonképpen az az állítás, hogy az eredményes tanuláshoz jó tanításra van szükség, még mindig érvényes. Más szóval, a hatékony tanulási környezet fő jellemzője az egészséges egyensúly egyrészt a felfedezés és egyéni tanulás, másrészt a rendszeres oktatás és irányítás között, figyelembe véve a diákok közti képességbeli, szükségletbeli és motivációs különbségeket.

2. A tanulási környezetnek meg kell erősíteni a diákokban kialakuló önszabályozási stratégiákat. Ez azt jelenti, hogy a tudás- és készségelsajátítás rendszeres beavatkozással történő külső szabályozását fokozatosan meg kell szüntetni, hogy a diákok saját tanulásuk irányítóivá váljanak. Más szóval, a külső és belső szabályozás közötti egyensúly vál-

tozni fog a tanulás folyamán abban az értelemben, hogy az önszabályozás folyamatosan erősödik, miközben a kifejezett tanítási támogatás gyengül.

3. Mivel a hatékony tanulás szempontjából nagyon fontos a környezet és az együttműködés, a hatékony tanulási környezetnek olyan autentikus, életszerű helyzetekbe kell beágyaznia a diákok konstruktív elsajátítási tevékenységeit, amelyek személyes jelentéssel bírnak a tanulók számára és jellemzőek azokra a feladatokra és problémákra, amelyekre a diákoknak a későbbiekben alkalmazniuk kell tudásukat és készségeiket. A matematika képesség elsajátítása, különösen annak hajlandósági és érzékenységi aspektusai, szükségessé teszik az állandó és kiterjedt tapasztalatszerzést és gyakorlatot a különböző képességi kategóriákban (szaktárgyi tudás, heurisztikus és metakognitív stratégiák), szituációkban.

4. Mivel a tantárgyi tudás, a heurisztikus módszerek és a metakognitív stratégiák kiegészítő szerepet játszanak a tanulásban, gondolkodásban és feladatmegoldásban, a tanulási környezetnek lehetőséget kell teremtenie arra, hogy az általános tanulási és gondolkodási készségeket a szaktárgyba ágyazva, így például a matematikaórákon sajátítsák el a tanulók.

5. A hatékony tanulási környezetnek olyan tantermi légkört és kultúrát kell létrehozni, amely a tanulókat arra ösztönzi, hogy saját tanulási tevékenységüket és feladatmegoldó stratégiájukat felidézzék és reflektáljanak azokra. Például Berry és Sahlberg érvelése szerint ahhoz, hogy a diákok tanulásról vallott nézeteit a De Corte-féle modell irányába módosítsuk, fejleszteni kell a tanulásról való fogalmi, metakognitív felfogásukat azáltal, hogy osztálytársikkal kis csoportokban megvitatják azokat és reagálnak rájuk. (50) Az önszabályozási készségek fejlesztése megkívánja, hogy a diákok jobban ismerjék a stratégiákat, elhiggyék, hogy ezek hasznosak és érdemesek őket tudni, végül, hogy elsajátítsák használatukat. (51)

Kétségtelen, hogy ezeket a vezérelveket – hasonlóan a fent tárgyalt konstruktív tanulási folyamatok tulajdonságaihoz – további kutatásoknak kell még megerősíteniük. Mindazonáltal néhány sikersztóri, amelyek bizonyos fokig ezeket az elveket testesítik meg, már nyújtott némi kezdeti bizonyítékot. (52) Saját központunkban most foglalkozunk egy ezzel kapcsolatos kutatási projekttel. A következőkben röviden bemutatok egy friss tanulmányt, amely a szöveges feladatok valóság-hű modellezését vizsgálta felső tagozatos általános iskolai diákok körében.

#### *A valóság-hű matematikai modellezés tanítása ötödik osztályosoknak*

Fentebb már beszámoltam olyan kísérletekről, amelyekben megfigyeltük, hogy az ötödikesek mennyire hajlamosak figyelmen kívül hagyni a külvilágról szerzett tudásukat, amikor szöveges feladatok matematikai modellezéséről és megoldásáról van szó. Ez volt a kiindulópontja annak a tanítási kísérletnek, amelyet az előteszt-utóteszt elv alapján állítottunk össze, hogy igazoljuk azt a feltevést, miszerint hatékony tanulási környezetben, megfelelő oktatáson keresztül ötödikes általános iskolásokban ki lehet fejleszteni egy olyan (matematikai) képességet, amely alkalmassá teszi a tanulókat a szöveges feladatok realisztikusabb modellezésére.

#### *A módszer*

Ugyanabból az iskolából három osztály vett részt a kísérletben: egy 19 ötödikesből álló kísérleti osztály (K) és két 18, illetve 18 hatodik osztályosból álló kontroll osztály (C1 és C2). A K osztályba járó diákoknak egy kísérleti programot tanítottunk a realisztikus modellezésről (a matematikaórák keretében). A program öt, két-két és fél órás tanulási egységből állt, az egyik kutató volt a tanár. A kísérlet során a két kontroll osztály tanulói a hagyományos matematika-tantervet követték. A három osztállyal felvettünk egy előzetes tesztet, amely 10 nem rutin feladatból állt, melyekben a matematikai modellezési feltételezések se nem nyilvánvalóak, se nem vitathatatlanok (mint a *Külvilágról szerzett tudás és a gyerekek szöveges feladatmegoldása* című alfejezetben az „iskolától való távolság” példája) és öt standard vagy rutinfeladatból, amelyek szembesítették őket a különbségekkel. A diákokat arra kértük, hogy ne csak a válaszokat írják le, hanem azt is, hogyan jutottak erre a megoldásra, és/vagy azokat a nehézségeket és aggodalmaikat, amelyek a feladat

megoldása közben jelentkeztek. A K osztályban folytatott kísérlet befejezése után az előzetes teszttel párhuzamos felmérő utótesztet írtunk meg mind a három csoportban. Az egyik kontroll csoportban (C1) ezt a tesztet megelőzte egy 15 perces bevezető, amelyben a diákok figyelmét felhívtuk arra, hogy a szöveges feladatok rutin megoldása nem mindig megfelelő, ha realiztikus megfontolásból tekintünk rájuk. Adtunk néhány ilyen példát és figyelmeztettük a diákokat, hogy a tesztben szerepel számos olyan feladat, amelyek megoldásánál a rutin eljárások nem megfelelőek. Egy hónappal később a K-osztály tanulóival megírtunk egy emlékeztető tesztet, amelyben ismét tíz nem-rutin feladat volt. Varianciaelemzéssel értékeltük, hogy milyen hatással volt a kísérleti program a gyerekek valóságghú válaszaire nem rutin feladatok esetében. A válaszokat akkor tekintettük valóságghűnek, ha valóságghú megoldás született, vagy valóságghú válasz kísérte a nem valóságghú megoldást.

#### *A tanulási környezet legfontosabb jellemzői*

A kísérleti kurzust a fent leírt hatékony tanítási és tanulási környezet tervezési elveivel összhangban fejlesztettük ki. Először is, a hagyományos matematikaórákon előkerülő szegényes szöveges feladatok helyett autentikusabb feladatokat adtunk fel, amelyeket úgy alakítottunk ki, hogy ösztönözzék a tanulókat arra, hogy figyeljenek a valóságghú matematikai modellezés bonyolultságára és a matematikai alkalmazások valóságghú és sztereotíp megoldása közötti különbségekre. Minden tanegység a valóságghú modellezés egy jellegzetesen problematikus témájára összpontosított. Az első egység témája például a következő volt: a világról meglévő tudás és a realiztikus megfontolások megfelelő alkalmazása abban az esetben, amikor egy olyan osztási feladat eredményét kell értelmezni, melyben maradék van. Az első feladatban egy 300 katonából álló hadsereg történetét vázoltuk fel, akik különböző katonai tevékenységet végeznek. Mindegyik történet végén egy olyan kérdés szerepelt, amely ugyanazt a számtani műveletet igényelte (nevezetesen  $300:8=$ ), ugyanakkor a válasz minden esetben más volt („38”, „37”, „37,5” és „37”, maradt a 4).

Másodszor, az utasítások a kísérleti osztályban jelentősen különböztek a hagyományos osztályokban adottaktól. Különböző tanítási módszereket alkalmaztunk, hogy a tanulókat aktív és konstruktív tanulási tevékenységre ösztönözzük: kiscsoportos feladatmegoldás olyan csoportokkal, ahol vegyes képességű gyerekek voltak; a megoldások és megoldási stratégiák egész osztállyal történő megvitatása és egyéni feladatok kiadása. Mind a kiscsoportos, mind az osztályszinten történt megbeszélések során gyakran tettük fel a következő kérdéseket: „Milyen nehézségekkel találtátok magatokat szembe a feladat megoldása során?”; „Miben nem értettetek egyet a csoportban?”; „Mit tanultatok a feladat megoldásából?” Ezzel a gyerekek figyelmét felhívtuk arra, hogy alaposan fontolják meg, milyen matematikai modellt használnak fel a megoldásaikhoz.

Végül, új tanórai kultúrát hoztunk létre, amelynek a fő jellemzője, hogy rendszeres figyelmet szentel a valóságghú modellezésnek, ami a matematikai képesség elsajátításának egyik szempontja. Ezt olyan tevékenységeken keresztül próbáltuk meg elérni, mint például értékes feladatmegoldó stratégiák modellezése, magyarázata és megvitatása, és hogy figyelmesen meghallgattuk a tanulók saját megoldásaikról adott magyarázatait és igazolásait. Az új tanórai kultúra másik fő eleme volt, hogy a diákokkal nyíltan megvittattuk, milyen új társadalmi normákat követ a tanár és a diák szerepe az órán, mi számít jó matematikai feladatnak, jó megoldási módnak, jó válasznak.

#### *Eredmények és további kilátások*

Mint ahogy vártuk (a megelőző tanulmányokkal összhangban), az előzetes teszt során a gyerekek erősen hajlottak arra, hogy figyelmen kívül hagyják a világról meglévő ismereteiket: mindössze 15% volt a valóságghú megoldások aránya. Mindazonáltal, ahogy a hipotézisben felvetettük, jelentős növekedést tapasztaltunk a K osztály valóságghú megoldásainak számában a második tesztben. (Hétről 51%-ra emelkedett az arányuk), a C osztályokéban

azonban nem. E tekintetben fontos megjegyezni, hogy nem elég csupán elmondani és ilusztrálni, hogy a szöveges feladatok rutin megoldása nem minden esetben megfelelő (ahogy a C1 osztályban tettük) ahhoz, hogy a gyerekek gondolkodását átformáljuk – értelmetlen, sztereotip feladatmegoldókból értelmes, valóság-hű problémamegoldókká fejlesszük őket. Ez az átalakítás intenzívebb és irányítottabb tanulási élményeket tesz szükségessé. Végezetül, a K osztályban elért pozitív eredményeket nem lehet feladatspecifikus hatásként értékelni. Az előtesztben, az utótesztben és az emlékeztető tesztben szereplő feladatok tartalmukban és a mögöttük meghúzódó matematikai modellezési nehézségekben többé-kevésbé lényegesen különböztek a kísérleti program feladataitól.

Bár e kisléptékű vizsgálat eredményeit nem lehet általánosítani, azok ígéretesek annak a hipotézisnek a szempontjából, amely szerint meg lehet változtatni a tanulók meggyőződéseit a világról meglévő tudás feladatmegoldásban játszott szerepéről, és hogy ki lehet fejleszteni bennük egyfajta hajlandóságot és képességet a szöveges feladatok valóság-hű modellezésére nézve azzal, hogy új tanórai kultúra és gyakorlat részeseivé tesszük őket. A kísérlet pozitív eredményei arra ösztönöztek bennünket, hogy megtervezzünk egy átfogóbb kísérletet, amelynek a célja egy hatékony matematikai feladatmegoldó tanulási és tanítási környezet kialakítása és értékelése az általános iskola felső tagozatában. A kísérlet több szempontból átfogóbb volt: négy kísérleti és hét kontrollcsoportot tartalmazott; a beavatkozás, miközben ugyanazokra az elvekre épült, mind a tartalom, mind az időtartam szempontjából kiterjedtebb volt és a tanítást az osztály tanára végezte; különböző értékelési módokat alkalmaztunk. A kísérletet, amely az adatelemzés és értékelés utolsó fázisában van, ezen a tanácskozáson szeretnénk bemutatni, a *Konstruktivista tanulási technológiákról* szóló szimpóziumon.

*Végül, új tanórai kultúrát hoztunk létre, amelynek a fő jellemzője, hogy rendszeres figyelmet szentel a valóság-hű modellezésnek, ami a matematikai képesség elsajátításának egyik szempontja. Ezt olyan tevékenységeken keresztül próbáltuk meg elérni, mint például értékes feladatmegoldó stratégiák modellezése, magyarázata és megvitatása, és hogy figyelmesen meghallgattuk a tanulók saját megoldásaikról adott magyarázatait és igazolásait. Az új tanórai kultúra másik fő eleme volt, hogy a diákokkal nyíltan megvittuk, milyen új társadalmi normákat követ a tanár és a diák szerepe az órán, mi számít jó matematikai feladatnak, jó megoldási módnak jó válasznak.*

### A jövő

Ebben a tanulmányban, amely a matematikatanulás kutatásáról nyújt szelektív, ennek következtében részleges áttekintést, meghatároztam a szakterület néhány fő áramlatát, amelyek véleményem szerint egészében véve érvényesek és jellemzőek a területre. Ezek a következők:

1. a matematikaoktatás céljainak újrafogalmazása a matematikai képesség elsajátításának szempontjából. Miként a fentiekből kitűnik, a matematikaoktatás újragondolása fontos hangsúlyeltolódásokhoz vezet a tantervek és készségek tartalmában, amelyeket fontosnak és érvényesnek tekintünk a matematikai kompetencia szempontjából;

2. a matematikatanulás egy olyan alternatív elméletének kidolgozása, amely szerint az a tudás és jelentés konstrukciójának egy aktív, megosztott és egyre inkább önszabályozó

folyamata, és amely lehetőleg azon alapul, hogy a diákokat bevonjuk az autentikus, életszerű szituációk modellezésébe, és az azokkal való tapasztalatszerzésre;

3. tervezési elvek kifejlesztése és értékelése olyan hatékony tanulási környezet létrehozására, amelyben konstruktív elsajátítási folyamatok indulhatnak el, elősegítve a matematikai képesség és alkotóelemeinek kialakítását.

Szeretnénk itt megemlíteni egy olyan irányvonalat, amelyet ebben az előadásban nem említettem, mégpedig a tesztelés problematikáját. Ám a matematikatanulás és -tanítás elméletében történt fontos változások szükségessé teszik új tesztelési módszerek és technikák alkalmazását, amelyek összhangban vannak a tanterv céljainak és tartalmának új hangsúlyjaival és szerves részei az oktatásnak, azaz megbízható információt nyújtanak a további tanítás mikéntjére vonatkozóan.

Bár a matematikaoktatás kutatása az utóbbi húsz évben virágzott, jelent tanulmány azt is jelzi, hogy mindegyik fő irányvonal számos további kutatást igényel. Nyilvánvaló, hogy ezek az irányvonalak egymással szorosan összefüggnek: ahhoz, hogy a tanítással történő matematikatanulás folyamatait tanulmányozzuk, meg kell vizsgálnunk, hogy a tanulók miként sajátítják el a matematikai képesség bizonyos elemeit, mint például a matematikai fogalmakat és a megoldási stratégiákat. Továbbá ahhoz, hogy rájövünk, hogy a tanítás miként befolyásolja ezeket a folyamatokat, meg kell figyelniük és elemeznünk a tanórán részt vevők közötti kölcsönhatásokat. Mindezt figyelembe véve, meggyőződésem, hogy a tanításon keresztül történő matematikatanulás igazi magyarázó elméletének kulcsa azoknak a lelki folyamatoknak a jobb megértése, amelyek a diákokban lejátszódnak és kibontakoznak a matematikai tudás, feladatmegoldó technikák, stratégiák és elképzelések stb. elsajátítása során. Ez nem kis feladat; sőt, miképpen Zimmermann az önszabályozással kapcsolatban kifejtette, ezek a folyamatok sokszor nehezen érthetőek tetten, mert gyakran összetettek és rejtettek, sőt mit több, kölcsönösen átfedik egymást. (53) Ez felveti azt a fontos stratégiai és módszertani kérdést, hogy miként folytassuk a jövőbeni kutatásokat ahhoz, hogy felfedjük a matematikai képesség elsajátításához vezető folyamatok lényegét.

E tekintetben szeretnénk röviden kitérni arra a megközelítésre, amelyet már az előző részben is említettem, nevezetesen valós osztálytermi szituációkban olyan komplex beavatkozások létrehozására és értékelésére, amelyeknek alapja jelenlegi feltételezett tudásunk és értelmezésünk a hatékony tanulásról. Ez a stratégia összhangban van az ún. tervezési kísérletekkel, amelyeket az „oktatási tervezéstudomány” kifejlesztését megcélzó tudósok támogatnak. Collins szerint „egy tervezési tudománynak kell meghatároznia, hogy a tanulási környezetek különböző tervezetei miként járulnak hozzá a tanuláshoz, együttműködéshez, motivációhoz stb.” (54) Ennek a beavatkozás-orientált megközelítésnek ketős célja van, nevezetesen először a haladási elmélet megalkotása, de ugyanúgy az osztálytermi gyakorlat javítása is. A két célkitűzés együttes megvalósítása a kissé ellentmondásos feltételek miatt igazi kihívást jelent a matematikatanulást és -tanítást kutatók számára.

A matematikatanulás új elméletének kísérletezés révén történt kidolgozása segítségével szükségessé teszi, hogy kifejlesszünk egy megbízható módszert komplex oktatási környezetekben való tanítási kísérletek megtervezésére olyan módon, hogy az empirikus adatokból érvényes elméleti következtetéseket lehessen levonni. Ez nem egyszerű feladat, hiszen az a lehetőség, hogy a külső vagy környezeti érvényességet garantáljuk, nem mentesít bennünket a belső érvényesség biztosítása alól. Hagyományosan az oktatáslélektan elsősorban a belső érvényességgel foglalkozik, ennek következtében a kutatást egyrészt az jellemezte, amit Salomon a jelenségek és folyamatok leegyszerűsítése általi elszigetelésnek nevezett, másrészt az, hogy az egyént elszigetelten vizsgálta. (55) Természetesen mindkét jellemvonás erősen ellentmond a matematikatanulás tanulmányozására fent felvázolt elméleti megközelítésnek és alapvető orientáltságának. Abból a nézőpontból kiindulva, hogy az oktatáslélektan a tanítási környezetek tervezésével van összefüggésben, Salomon szerint a tudományág megkülönböztető jegye – összhangban a tervezési

kísérletekről szóló elképzelésével – az ún. „komplex összetevők” tanulmányozása és tervezése kellene hogy legyen. Ezek gondosan kidolgozott egységek, például olyan tanulási környezetek, amelyekben számos különböző elem és tényező működik és hat egymásra. Természetesen ez a megközelítés szükségessé teszi megfelelő kutatási tervek és stratégiák, valamint az adatgyűjtés, -feldolgozás és -elemzés alkalmas eszközeinek és eljárásainak kidolgozását. Nem csak az „összetevők”-re mint egységekre érvényesen, hiszen az „összetevők” építőköveit is elemeznünk kell. Például jelenlegi matematikai feladatmegoldási kísérletünkben, amelyben a holisztikus módszert követtük, azzal is küszködünk, hogy elemezzük azokat a (videóra felvett) gondolkodási és metakognitív folyamatokat, amelyek a kétfős tanulócsoportokban végbemennek a feladat megoldása közben. De figyelembe véve mindkét cél – elméletek kidolgozása és a gyakorlat javítása – elérését a teljes osztálytermi környezet alapvető megváltoztatásán keresztül, szükség van arra, hogy együttműködésen és partnerségen alapuló kapcsolatot alakítsunk ki a kutatók és a tanárok között. Úgy tűnik, ez a megközelítés a tanulás és tanítás kutatásának egy másik fő áramlatává válik, ahogyan azt *Schauble* és *Glaser* nemrégiben, 1996-ban kiadott munkája is illusztrálja: az *Innovations in learning: New environments for education* jól példázza azt az interdiszciplináris együttműködést, amely a tanárok, kutatók, tanárképzést végzők és közösségi partnerek között kialakult. A mű alap gondolata, hogy a tanulási környezetek megtervezése és az elméleti kidolgozása csakis kölcsönös támogatással haladhat tovább. (56)

Az a tapasztalatunk, hogy ez az együttműködés alapvetően fontos a kutatásban és a tanításban részt vevők közötti jó kommunikáció létrejöttéhez, és ahhoz is, hogy módosíthassuk és átformálhassuk a tanárok elképzeléseit a matematika oktatásáról, tanításáról és tanulásáról.

#### Jegyzet

- (1) *Epistemological perspectives on educational psychology* (Special issue). Szerk.: PHILLIPS, D. C. *Educational Psychologist*, 1994. 29. sz., 1–55. old.; SALOMON, G.: *Unorthodox thoughts on the nature and mission of contemporary educational psychology*. *Educational Psychology Review*, 1996. 8. sz., 397–417. old.
- (2) BERLINER, D. C.–CALFEE, R. C.: *Afterword*. = *Handbook of educational psychology*. Szerk.: BERLINER, D. C.–CALFEE, R. C. NY: Macmillan, New York 1996., 1020–1022. old.
- (3) SHULMAN, L. S.–QUINLAN, K. M.: *The comparative psychology of school subjects*. = *Handbook of educational psychology*. Szerk.: BERLINER, D. C.–CALFEE, R. C. NY: Macmillan, New York 1996, 399–422. old.
- (4) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Szerk.: GROUWS, D. A. NY: Macmillan, New York 1992.
- (5) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (ICMI Study Series.) Szerk.: NESHER, P.–KILPATRICK, J. UK: Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- (6) *International handbook of mathematics education: Part 1 & 2*. Szerk.: BISHOP, A. J.–CLEMETS, K.–KEITEL, C.–KILPATRICK, J.–LABORDE, C. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1996.; *Theories of mathematical learning*. Szerk.: NESHER, L. P.–COBB, P.–GOLDH, G. A.–GREER, B. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah 1996.
- (7) DE CORTE, E.–GREER, B.–VERSCHAFFEL, B.: *Mathematics teaching and learning*. = *Handbook of educational psychology*. Szerk.: BERLINER, D. C.–DALFEE, R. C. NY: Macmillan, New York 1996, 491–549. old.
- (8) DE CORTE, E.: *Fostering cognitive development. A perspective from research on mathematics learning and instruction*. *Educational Psychologist*, 1995. 30. sz., 37–46. old.; DE CORTE, E.–GREER, B.–VERSCHAFFEL, B.: *Mathematics teaching and learning*, i. m.; SCHOENFELD, A. H.: *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. = *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. Szerk.: GROUWS, D. A. NY: Macmillan, New York 1992, 334–370. old.
- (9) DE CORTE, E.–GREER, B.–VERSCHAFFEL, B.: *Mathematics teaching and learning*, i. m.; PERKINS, D.: *Outsmarting IQ: The emerging science of learnable intelligence*. NY: The Free Press, New York 1995.
- (10) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. VA: National Council of Teachers of Mathematics, Reston 1989.
- (11) KILPATRICK, J.: *Mathematics instruction. Contemporary research*. = *The international encyclopedia of education*. (2nd edition) Szerk.: HUSEN, T.–POSTLETHWAITE, T. N. UK: Pergamon Press, Oxford 1994, 3647–3652. old.; *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, i. m.; ROMBERG, T. A.: *Ma-*

- thematics: *Primary school programs*. = *The international encyclopedia of education* (2nd edition). Szerk.: HUSEN, T.–POSTLETHWAITE, T. N. UK: Pergamon Press, Oxford 1994, 3655–3661. old.
- (12) HIEBERT, J.–CARPENTER, T. P.–FENNEMA, E.–FUSON, K.–HUMAN, P.–MURRAY, H.–OLIVIER, A.–WEARNE, D.: *Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics*. Educational Researcher, 1996. 25. sz., 12–22. old.; VERSCHAFFEL, L.–DE CORTE, E.: *Number and arithmetic*. = *International handbook of mathematics education*. Szerk.: BISHOP, A. J.–CLEMENTS, K.–KEITEL, C.–KILPATRICK, J.–LABORDE, S. C. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1996. 1. sz., 99–137. old.
- (13) SOWDER, J.: *Estimation and number sense*. = *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Szerk.: GROUWS, D. A. NY: Macmillan, New York 1992, 371–389. old.
- (14) Ua.
- (15) DE CORTE, E.–VERSCHAFFEL, L.–LAMOTE, C.–DHERDT, N.: *Estimating numerosity in a rectangular grid. The development of a clever estimation strategy*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, IL., Chicago 1997 március
- (16) SIEGLER, R. S.–SHIPLEY, C.: *Variation selection, and cognitive change*. = *Developing cognitive competence: New approaches to process modeling*. Szerk.: HALFORD, G.–SIMON, T. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale 1995, 31–76.
- (17) HOFER, B. K.–PINTRICH, P. R.: *The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning*. Review of Educational Research, 1997. 67. sz., 88–140. old.
- (18) SCHOENFELD, A. H.: *When good teaching leads to bad results: the disasters of „well-tought” mathematics courses*. Educational Psychologist, 1988. 23. sz., 145–166. old.
- (19) VERSCHAFFEL, L.–DE CORTE, E.–LASURE, S.: *Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems*. Learning and Instruction, 1994. 4. sz., 273–294. old.
- (20) DE CORTE, E.–VERSCHAFFEL, L.–LASURE, S.–BORGHART, I.–YOSHIDA, H.: *Real-world knowledge and mathematical problem solving in upper primary school children*. = *Learning sites: Social and technological contexts for learning*. Szerk.: BLISS, J.–SÁLJÓ, R.–LIGHT, P. UK: Elsevier Science Ltd., Oxford (Előkészületben.)
- (21) STIGLER, J. W.–FERNANDEZ, C.–YOSHIDA, M.: *Traditions of school mathematics in Japanese and American elementary schools*. = *Theories of mathematical learning*. Szerk.: STEFFE, L. P.–NESHER, P.–COBB, P.–GOLDIN, G. A.–GREER, B. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah 1996, 149–175. old.
- (22) DE CORTE, E.: *Fostering cognitive development. A perspective from research on mathematics learning and instruction*, i. m.
- (23) *Constructivism in education*. Szerk.: STEFFE, L. P.–GALE, J. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale 1995.
- (24) HATANO, G.: *A conception of knowledge acquisition and its implications for mathematics education*. = *Theories of mathematical learning*. Szerk.: STEFFE, L. P.–NESHER, P.–COBB, P.–KILPATRICK, J.–GREER, B. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah 1996, 197–217. old.
- (25) GREER, B.: *Theories of mathematics education. The role of cognitive analysis*. = *Theories of mathematical learning*. Szerk.: STEFFE, L. P.–NESHER, P.–COBB, P.–GOLDIN, G. A.–GREER, B. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah 1996.; HATANO, G.: *A conception of knowledge acquisition and its implications for mathematics education*, i. m.; PHYE, G. D.: *Epilogue: Classroom learning looking ahead*. = *Handbook of academic learning. Construction of knowledge*. Szerk.: PHYE, G. D. CA: Academic Press, San Diego 1997, 593–602. old.
- (26) PHILLIPS, D. C.: *The good, the bad and the ugly. The many faces of constructivism*. Educational Researcher, 1995. 24. sz., 5–12. old.
- (27) FISCHBEIN, E.: *Introduction*. = *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (ICMI Study Series). Szerk.: NESHER, B.–KILPATRICK, J. UK: Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- (28) GREER, B.: *Theories of mathematics education. The role of cognitive analysis*, i. m.; JANVIER, C.: *Constructivism and its consequences for training teachers*. = *Theories of mathematical learning*. Szerk.: STEFFE, L. P.–NESHER, P.–COBB, P.–GOLDIN, G. A.–GREER, B. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah 1996, 449–463. old.
- (29) BOEKAERTS, M.: *Self-regulated learning at the function of cognition and motivation*. European Psychologist, 1996. 1. sz., 100–112. old.; ZIMMERMAN, B. J.: *Dimensions of academic self-regulation: A conceptual framework for education*. = *Self-regulation of learning and performance: Issues and educational applications*. Szerk.: SCHUNK, D. H.–ZIMMERMAN, B. J. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale 1994, 3–21. old.
- (30) *Current issues in research on self-regulated learning. A discussion with commentaries* (Special issue). Szerk.: PINTRICH, P. R. Educational Psychologist, 1995. 30. sz., 171–228. old.; *Self-regulation of learning and performance: Issues and educational applications*. Szerk.: SCHUNK, D. H.–ZIMMERMAN, B. J. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale 1994.
- (31) ZIMMERMAN, B. J.–RISEMBERG, R.: *Self-regulatory dimensions of academic learning and motivation*. = *Handbook of academic learning. Construction of knowledge*. Szerk.: PHYE, G. D. CA: Academic Press, San Diego 1994, 105–125. old.

- (32) Ua.
- (33) SCHUNK, D. H.–ZIMMERMAN, B. J.: *Self-regulation in education: Retrospect and prospect. = Self-regulation of learning and performance: Issues and educational applications.* Szerk.: SCHUNK, D. H.–ZIMMERMAN, B. J. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale 1994, 305–314. old.
- (34) ALEXANDER, P. A.: *Superimposing a situation-specific and domain-specific perspective on an account of self-regulated learning.* *Educational Psychologist* 1995. 30. sz., 189–193. old.
- (35) BROWN, J. S.–COLLINS, A.–DUGUID, P.: *Situated cognition and the culture of learning.* *Educational Research*, 1989. 18. sz., 32–42. old.
- (36) BRUNER, J.: *The culture of education.* MA: Harvard University Press, Cambridge 1996.; GREENO, J. G.–COLLINS, A. M.–RESNICK, L. B.: *Cognition and learning. = Handbook of educational psychology.* Szerk.: BERLINER, D. C.–CALFEE, R. C. NY: Macmillan, New York 1996, 15–46. old.
- (37) GRUBER, H.–LAW, L. C.–MANDL, H.–RENKL, A.: *Situated learning and transfer. = Learning in humans and machines. Towards an interdisciplinary learning science.* Szerk.: REIMANN, P.–SPADA, H. UK: Elsevier Science Ltd, Oxford 1995, 168–188. old.
- (38) ANDERSON, J. R.–REDER, L. M.–SIMON, H. A.: *Situated learning and education.* *Educational Researcher*, 1996. 25. sz., 5–11. old.
- (39) VOSNIADOU, S.: *Towards a revised cognitive psychology for advances in learning and instruction.* *Learning and Instruction*, 1996. 6. sz., 95–109. old.
- (40) ANDERSON, J. R.–REDER, L. M.–SIMON, H. A.: *Situated learning and education*, i. m.
- (41) HATANO, G.: *A conception of knowledge acquisition and its implications for mathematics education*, i. m.
- (42) ERNEST, P.: *Varieties of constructivism. A framework for comparison. = Theories of mathematical learning.* Szerk.: STEFFE, L. P.–NESHER, P.–COBB, P.–GOLDIN, G. A.–GREER, B. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah 1996, 335–350. old.
- (43) COBB, P.–BAUERSFELD, H.: *The emergence of mathematical meaning: Interactions in classroom cultures.* NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale 1995.; WOOD, T.–COBB, P.–YACKEL, E.: *Change in teaching mathematics: A case study.* *American Educational Research Journal*, 1991. 28. sz., 587–616. old.
- (44) *Cooperative learning with computers (Special issue).* Szerk.: MEVARECH, Z. R.–LIGHT, P. H. *Learning and Instruction*, 1992. 2. sz., 155–285. old.; *Distributed cognition. Psychological and educational considerations.* Szerk.: SALOMON, G. UK: Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- (45) WEBB, N. M.–PALINCSAR, A. S.: *Group processes in the classroom. = Handbook of educational psychology.* Szerk.: BERLINER, D. C.–CALFEE, R. C. NY: Macmillan, New York 1996, 841–873. old.
- (46) BERRY, J.–SAHLBERG, P.: *Investigating pupils' ideas of learning.* *Learning and Instruction*, 1996. 6. sz., 19–36. old.
- (47) DE CORTE, E.: *Learning theory and Instructional science. = Learning in humans and machines. Towards an interdisciplinary learning science.* Szerk.: REIMANN, P.–SPADA, H. UK: Elsevier Science Ltd., Oxford 1995, 97–108. old.
- (48) WEINERT, F. E.–DE CORTE, E.: *Translating research into practice. = International encyclopedia of developmental and instructional psychology.* Szerk.: DE CORTE, E.–WEINERT, F. E. UK: Elsevier Science Ltd., Oxford 1996, 43–50. old.
- (49) COLLINS, A.: *Toward a design science of education. = New directions in educational technology.* (NATO ASI Series F: Computers and Systems Sciences.) Szerk.: SCANLON, E.–O'SHEA, T. Springer-Verlag, Berlin 1992. 96. sz., 15–22. old.
- (50) BERRY, J.–SAHLBERG, P.: *Investigating pupils' ideas of learning*, i. m.
- (51) DEMBO, M. H.–EATON, M. J.: *School learning and motivation. = Handbook of academic learning: Construction of knowledge.* Szerk.: PHYE, G. D. CA: Academic Press, San Diego 1997, 65–103. old.
- (52) DE CORTE, E.–GREER, B.–VERSCHAFFEL, B.: *Mathematics teaching and learning*, i. m.
- (53) ZIMMERMAN, B. J.: *Dimensions of academic self-regulation: A conceptual framework for education*, i. m.
- (54) BROWN, A. L.: *Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings.* *Journal of the Learning Sciences*, 1992. 2. sz., 141–178. old.; COLLINS, A.: *Toward a design science of education*, i. m.
- (55) SALOMON, G.: *Unorthodox thoughts on the nature and mission of contemporary educational psychology*, i. m.
- (56) *Innovations in learning: New environments for education.* Szerk.: SCHAUBLE, L.–GLASER, R. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah 1996.