Sárvári Csaba

A számítógép-algebrai rendszerek szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében

A Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Karán az informatikus hallgatók matematika-oktatását számítógép-algebrai rendszerekkel valósítják meg. A számítógép-algebrai rendszerek olyan interaktív programok, amelyek a numerikus számítógépes programokkal szemben szimbolikus kifejezésekkel való matematikai számításokat is megengednek.

Az információs kommunikációs technológiának a 20. század utolsó évtizedeiben bekövetkezett gyökeres megújulása paradigmaváltást idézett elő az oktatásban is. A számítástechnika, informatika által kínált eszközök az oktatás-nevelés minden területén a didaktikai eljárásrendszer átgondolását, újrakonfigurálását teszik szükségessé. Hatványozottan érvényes ez a matematika oktatásának területén.

Az információs technológia kínálta új eszközök közül a matematikaoktatás számára kiemelkedő jelentőségűek a számítógép-algebrai rendszerek.

A számítógép-algebrai rendszerek megjelenése a matematikai készségek, jártasságok rendszerét alapjaiban érinti. Azoknak az eljárásoknak a tanítása, amelyeknek elsajátítása-elsajátíttatása korábban erőnk jelentős részét lekötötte, ma sokszor felesleges: a számítógép-algebrai rendszerek az ilyen típusú feladatokat könnyedén, nagyon rövid idő alatt megoldják. De csak akkor, ha okszerűen, kellő ismeretekkel felvértezve használjuk azokat. Tehát nem arról van szó, hogy kevesebb időt kell szánnunk a matematika elsajátítására. A súlypont helyeződött át: az eddigieknél is megalapozottabb fogalmi ismeretekre van szükség. A rendszer időt szabadít föl a gondolkodás számára, az algoritmusok megtervezésére, hatékonyabbá tételére. A korábbinál több idő jut az induktív megközelítésre, a szemléltetés új lehetőségei tárulnak fel.

A számítógép-algebrai rendszerek hathatós segédeszközei a matematikusoknak, fizikusoknak, mérnököknek, technikusoknak, pszichológusoknak – vagyis mindenkinek, aki matematikai számításokat végez. Nélkülözhetetlenek a modern elméleti és alkalmazott tudományos kutatásokban, valamint az oktatásban.

Mindezt ezek a rendszerek alapvetően két tulajdonságukkal érik el:

– segítségükkel igen nagy pontosságú számítások végezhetők el nagyon gyorsan;

– alkalmasak szimbolikus és algebrai számítások végzésére.

A rendszerek egyik legismertebbike – a Maple – sikerét nyitott architektúrájának is köszönheti. Az eljárások nagy többsége a Maple saját nyelvén íródott és a felhasználók számára forrásnyelvként rendelkezésre áll. Így bárkinek lehetősége van a rendszer könyvtári eljárásainak módosítására, új könyvtárak létrehozására.

A számítógépes hálózatok megjelenésével a Maple a matematikatanulás bázisává válhat. A Maple-munkalapok a paraméterek változtatásával képesek megsokszorozni a példákat, problémákat, feladatokat.

A számítógép-algebrai rendszerek használatának didaktikai problémái

A számítógép-algebrai rendszereknek a matematika oktatásába való bevonása szerteágazó didaktikai feladatokat ró ránk, oktatókra, tanárokra.

Ezeket a feladatokat a matematika-didaktika alábbi dimenziói szerint csoportosítva vizsgáljuk:

– szakmai dimenzió;
– pszichológiai dimenzió;
– pedagógiai dimenzió;
– konstruktív dimenzió.

Emellett szólunk a tanári, tanulói attitűd alakulásáról.

Szakmai dimenzió

A számítógép-algebrai rendszerek egyik legnagyobb előnye, hogy terjedelmes szimbolikus számítások elvégzésére is képesek. A rendszer megkíméli a felhasználót az önmagában többnyire érdektelen, fárasztó részlet-számításoktól. Esetenként ezeket többnapi munkával – vagy még úgy sem – a hibalehetőségeket halmozva tudnánk csak elvégezni. A Maple lehetővé teszi, hogy energiánk nagyobb részét a meggondolásokra összpontosítsuk.

A rendszernek másik nagy előnye a pontos aritmetika. A számítógép-algebrai rendszerekkel nyert eredmények vagy egzaktak, vagy a fölhasználó által meghatározott pontosságúak.

A szimbolikus számítások elvégezhetősége és az aritmetikai képességek lehetővé teszik olyan matematikai témakörök kimerítő tárgyalását, amelyekre korábban nem volt mód. Ilyen például a legtöbb numerikus eljárás. Lehetővé válik a több ilyen eljárás együttes felhasználását megkövetelő matematikai modellek előállításának tanítása.

Pszichológiai dimenzió

A matematika műveléséhez, a matematikai gondolkodáshoz és kommunikációhoz valamilyen módon reprezentálnunk kell a matematikai struktúrákat. A kommunikáció külső reprezentációt kíván nyelvi eszközök, írott szimbólumok, ábrák, tárgyak formájában. (*Lesh*, *R*., *Post*, *T.* és *Behr*, *M*.)

A gondolkodás esetében a pszichikumban való belső reprezentációról beszélünk. A hatékony, tartós tudás alapja a sűrű szövésű hálóhoz vagy egy nagyváros közlekedési hálózatához hasonlítható, kapcsolatokban gazdag belső tudásreprezentáció. A matematikai megértés a tények, fogalmak, eljárások között kiépülő kapcsolatok gazdagodásával fejlődik ki. A számítógép-algebrai rendszerek a megfelelő tudásreprezentációt több módon is igen hatékonyan támogatják:

– a megjelenítés, ábrázolás gazdag eszköztárával;
– a tananyag állandó elérhetőségével (hyperlinkek, könyvjelzők);
– a változatok, reprezentációk könnyű előállításával.

A matematikai megértés egyik legfontosabb mutatója a transzferre való képesség. Kialakításához sok eszközt kínál a Maple: animációk, a paraméterek váltogatása, a tananyag egységeinek összekapcsolása linkekkel, több munkalap párhuzamos szerkesztésének lehetősége.

P. C. Wason és *P. N. Johnson-Laird* kimutatták, hogy logikailag ekvivalens feladatokat, problémákat lényegesen könnyebben, gyorsabban tudunk megoldani, ha azokat hozzánk közel eső, számunkra ismerős modellel írják le. Olyan modellekkel, amelyhez élményeink, korábbi ismereteink kapcsolódnak. A számítógép-algebrai rendszer sokat segíthet itt: az adott feladat több konkrét modellel megfogalmazható, végigszámolható. Az előadások, gyakorlatok szűk időkerete itt nem jelent korlátozó feltételt.

Pedagógiai dimenzió

A logarléc, majd később a számológép használata csak kellő didaktikai körültekintéssel lehetett igazán eredményes. Méginkább elmondható ez a számítógép használata, a számítógép-algebrai rendszernek a tanítási-tanulási rendszerbe való bevonása esetén. Nem túlzás, amikor azt állítjuk: a matematikai didaktika egészét érinti az új eszköz megjelenése; szakdidaktikánk minden elemét újra kell gondolnunk. A mindent újra gondolás kényszere pedig éppen a rendszer rendkívüli adottságaiból fakad. A Maple nagyon rövid idő alatt képes olyan feladatokat megoldani, amelyek megoldására kézi számolással órák kellenek.

A rendszer egyetlen utasítással összetett feladatokat képes megoldani (például primitív függvény megkeresése, optimalizálás). Súlyos hiba lenne azonban a matematikai ismeretszerzést Maple-utasítások rendszerére építenünk. A számítógép-algebrai rendszerek matematikaoktatásban való alkalmazása során a fogalmak gondos kialakítása nem szenvedhet csorbát. Ellenkezőleg: a rendszert úgy kell felhasználnunk, hogy a fogalom kifejtése, beágyazása általa is gazdagodjék.

Az algoritmusok belső memóriatérképének létre kell jönnie, mielőtt azok végrehajtását a számítógépre bíznánk.

Az egyes gondolkodási műveletek tanítása során a rendszertől segítséget kaphatunk:
– az algoritmikus gondolkodás fejlesztésében;
– az általánosítás, analógiás gondolkodás terén;
– az induktív megközelítés nagyobb lehetőségével;
– sejtések megfogalmazásánál;
– az absztrakciós készség fejlesztésénél;
– a vizuális gondolkodás terén.

A sor természetesen tovább bővíthető.

Szemléltetésként tekintsük a következő feladatot:

Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, amelyekre a $8^p + p^2$ kifejezés is prím.

A megoldás első lépéseként szeretnénk megsejteni a szóban forgó kifejezés viselkedésének törvényszerűségét.

A Maple segítségével, egy összetett utasítással megvizsgáljuk a kifejezést a prímszámok egy sorozatára. *(1. ábra)*

Úgy fest, csak egyszer lesz prím, de ami fontosabb, azt sejtjük, hogy ezt az esetet kivéve a kifejezés minden páratlan prímre osztható 3-mal.

A rendszer használatának didaktikai előnyeiből kettőt emeljünk ki:

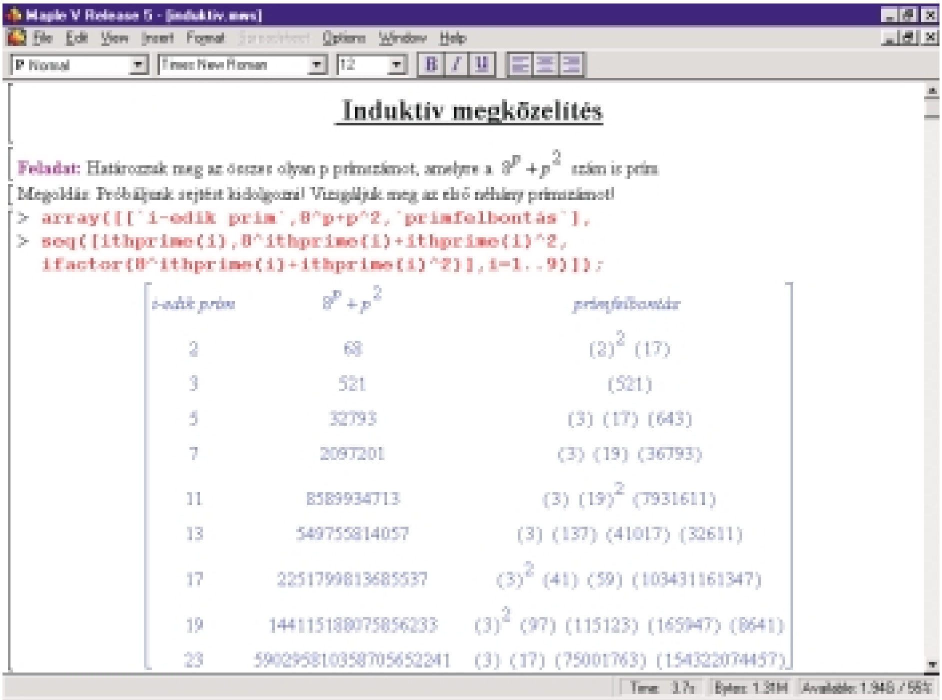
1. Az új tudáselemre való összpontosítás lehetősége (ismeretlánc). Ezt példával illusztráljuk: A logisztikus egyenletet mint speciális elsőrendű differenciálegyenletet szeretnénk tanulmányozni. Előzőleg foglalkoztunk már a polinomok algebrájával, a racionális törtfüggvényekkel, a racionális törtek integrálásával.

A logisztikus differenciálegyenlet megoldása során tehát eltekinthetünk a résztörtekre bontás feladatától, ezek integrálását is a gépre bízhatjuk, hisz ezeket már korábban megtanulták a hallgatók. Így erőteljesebben összpontosíthatnak a differenciálegyenlet megoldására. Ha már abban is bizonyos rutinra tettek szert, foglalkozhatunk a megoldások szerkezetének elemzésével, stabilitási problémákkal. Ekkor már differenciálegyenlet kezelésének egyes részfeladatait (például az iránymezők felrajzolása) is a számítógéppel végezhetjük, s teljes figyelmünket, időnket, energiánkat a megoldások értékelésének szentelhetjük.

2. Az eredmények ellenőrzése, visszacsatolás. Az eredményes tanítás-tanulás alapfeltétele a visszacsatolás, megerősítés. *K. Popper* tetradikus sémája, amellyel a „Hogyan növekszik a tudásunk?” kérdésre kíván választ adni:

$P_1 \to KE \to HK \to P_2$

ahol P_1 azt a problémát jelöli, amelyből kiindulunk,



1. ábra. Törvényszerűség megsejtése induktív úton

KE a kísérleti elmélet, amelyet a probléma megoldására ajánlunk,

HK a hiba kiküszöbölésének folyamata, s P_2 azt a befejező problémát jelenti, amely a vitákból, vizsgálatból, problémamegoldásból kialakult.

Tehát a tudás problémákból indul és problémákban végződik. A popperi értelemben vett hibakiküszöbölést nagyon eredményesen képesek szolgálni a számítógép-algebrai rendszerek:

– a numerikus ellenőrzéssel;

– olyan munkalapokkal, ahol a paraméterek váltogatásával a feladat feltételei változtathatók;

– a vizuális megjelenítéssel;

– a programkönyvtárban tárolt megoldásokkal.

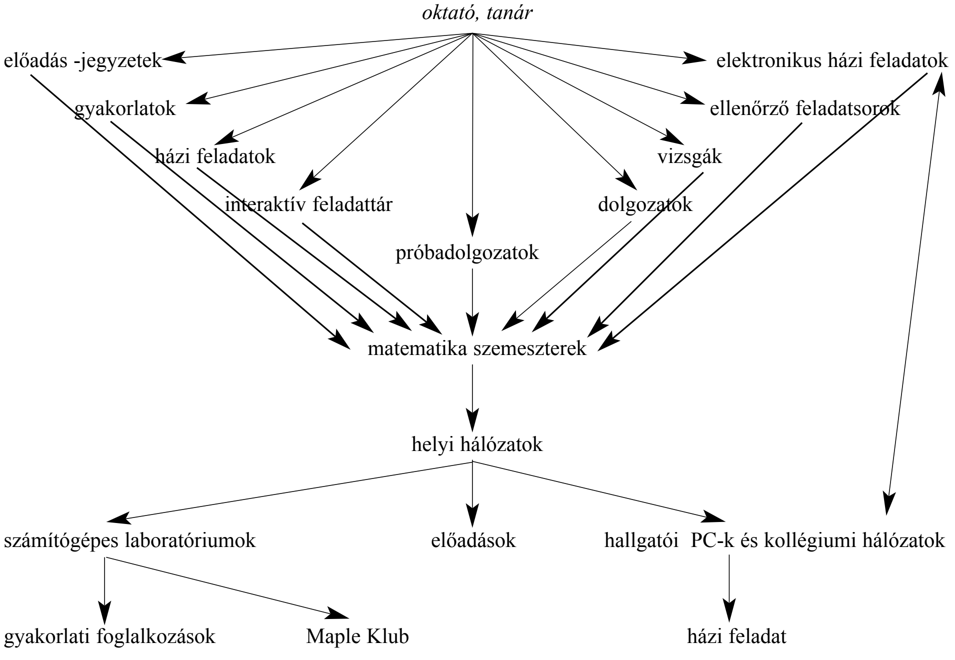
Konstruktív (oktatásszervezési) dimenzió

A számítógép-algebrai nyelv kiválóan alkalmas arra, hogy – más elemekkel kiegészítve – a matematikai tudásbázis alapelemévé váljék.

A Pécsi Tudományegyetem PMMF karán az informatikus hallgatók matematikai oktatását az 1998–99-es tanévtől kezdődően ilyen környezetben valósítjuk meg.

A rendszert mutatja a *2. ábra.*

A tananyag valamennyi egységét – előadásjegyzetek, gyakorlatok, házi feladatok, interaktív példatár, zárthelyi dolgozatok, az elmúlt szemeszterek vizsgadolgozatai és az aktuális vizsgakérdések, ismétlő-rendszerező feladatok – a helyi számítógépes hálózaton elérhetővé tettük. A Maple-munkalapok mellett Toolbook szerzői rendszerrel készült ellenőrző feladatsorok és az interaktív példatár képezik a tudásbázist.



2. ábra. Hálózat alapú oktatás sémája

Az előadásokon elsősorban illusztratív céllal használjuk a Maple-rendszert. Az illusztráció lehet két- vagy háromdimenziós ábra, nagyon sokszor animáció. Ezeket kombinálhatjuk az adatszerkezetek sokoldalú bemutatásával. Segíthet a rendszer a jelenség bemutatásához szükséges, de időigényes számítások, eljárások gyors elvégzésével is. Az előadások elektronikus változata a hálózaton állandóan elérhető, ezek nyomtatott változatát is kézhez kapják a hallgatók. Tapasztalataink azt mutatják, hogy az előadásokon csínján kell bánnunk a számítógép-algebrai rendszer használatával és általában a multimédiás eszközökkel. Az előre elkészített, a film, illetve diakép vetítéséhez hasonlóan bemutatott munkalap kevéssé hatékony.

Egyrészt semmi sem pótolhatja az élő előadás rögtönzésnek is teret adó frissességét, másrészt a bármilyen „pergő”-nek látszó anyag is csökkenti a hallgatók figyelmi szintjét, figyelmi aktivitását.

Ugyanakkor a Maple nyújtotta eszközökkel az előadás elektronikus változata korábban nem remélt módon támogatható. Az induktív megközelítést sem idő, sem terjedelem nem korlátozza. Az animáció lehetőséget nyújt a mozgás, a jelenségek dinamikájának érzékeltetésére.

A gyakorlatokon folyó munka állandó segítője, a tábla és a füzet mellett egyenragú színtere a számítógép-hálózat, s eszköze a számítógép-algebrai rendszer, a Maple.

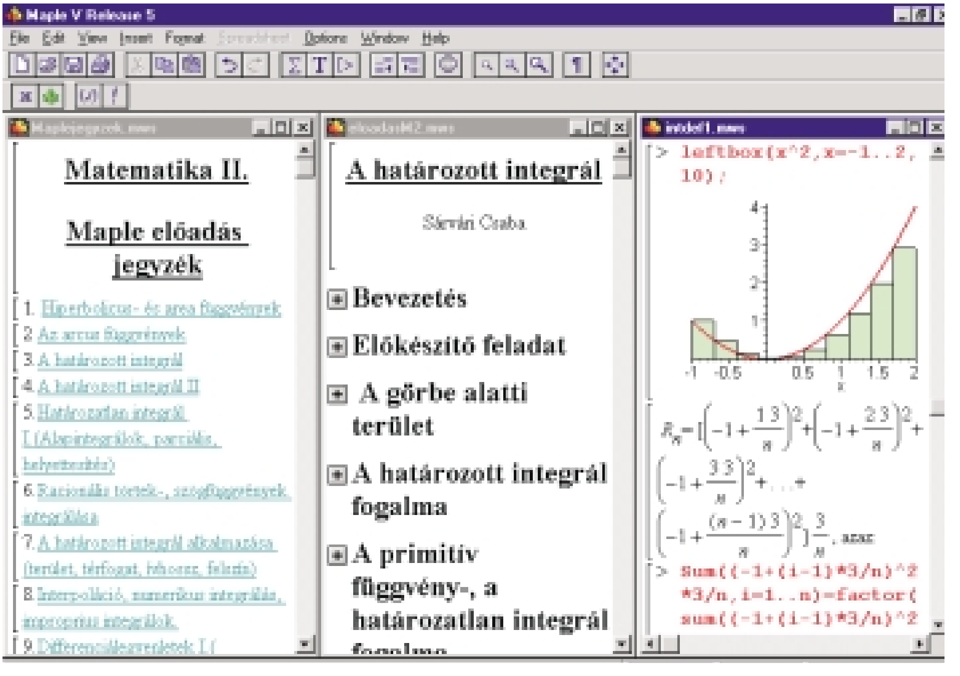
Ez sok előnnyel jár, de nagy didaktikai kihívást, próbatételt is jelent. A rendszer alkalmazása, a Maple hatalmas numerikus képessége és a szimbolikus számítások elvégezhetősége miatt sok olyan tananyagrész tárgyalását lehetővé teszi – s ezek nemcsak numerikus jellegűek – amelyekre korábban nem kerülhetett sor.

Ugyanakkor a fogalmak gondos kialakítása legalább olyan fontos feladatunk, mint korábban.

A Maple megtanulása sem kis feladat. Bár ez később busásan megtérül, kezdetben jelentős energiát köt le.

Minden egyes fogalom, eljárás, algoritmus tanításánál gondosan kell ügyelnünk arra, hogy annak egészét átlássák, értsék a hallgatók. Ki kell alakulnia a megfelelő memóriaképnek és a fogalmaknak, eljárásoknak, algoritmusoknak be kell ágyazódniok a reprezentációs hálóba. A számítógépes eljárások túl korai vagy nem kellő gondossággal megtervezett használata ezt a folyamatot gátolhatja, sőt lehetetlenné is teheti, s így jóvátehetetlen kárt okozhatunk.

Viszont a Maple okszerű használata megsokszorozhatja a gyakorlatokon folyó munka hatékonyságát. A munkalapok párhuzamos szerkeszthetősége nagymértékben növeli a kapcsolatokban gazdag belső tudásreprezentáció kialakulásának lehetőségét. *(3. ábra)* Nagy előny, hogy a teljes tananyag állandóan rendelkezésre áll. A korábban kifejlesztett és a Maple-ben rendelkezésre álló eljárások felidézhetők, használhatók.



3. ábra. Több Maple-munkalap egyidejű használata.

A képzés fontos része a Maple-klubban folyó munka. Itt a Maple-re vonatkozó ismereteket is bővítjük, a tananyag összetettebb részeire is kitérünk és speciális matematikai témák is sorra kerülnek.

A tanári, illetve tanulói attitűd változása

A Maple-munkalapok rendszerén alapuló tananyag előállítása természetesen igen nagy munka. A tananyag előállítására fordítandó idő kezdetben sokszorosa a hagyományos készülésnek. Ez azonban később megtérül, hisz a tananyag könnyen módosítható. Egyrészt a Maple elfogadható szövegszerkesztővel rendelkezik, másrészt a korábban megírt eljárások felhasználhatók, átalakíthatók.

A számítógép-algebrai rendszer használata folyamatosan kihívást jelent a tanár, az oktató számára is. A rendszer tudása imponálóan nagy, memóriája tökéletes. Az egyes algoritmusok futása sok meglepetéssel szolgálhat. Például a rendszer általánosabban vagy egyáltalán csak másként kezeli az adott problémát, mint ahogy arra számítottunk. Sok olyan kérdéskörrel tudunk foglalkozni, amelyek feldolgozására korábban nem volt mód.

Mindez a rendszer egyre jobb megismerésének igényével együtt állandó kísérletezésre, ismeretbővítésre sarkall.

A Maple nem pótolja a matematikai ismeretszerzést. Ellenkezőleg: ha értelmesen használjuk, „segítünk" neki, akkor a beépített eljárások alkalmazását magasabb szintre emelhetjük. Sokszor ez azt jelenti, hogy a rendszer „önállóan" nem tudná megoldani a feladatokat, megfelelő irányítással viszont „csodákra" képes. Mindezt, megfelelő példákkal, tudatosítanunk kell hallgatóinkban.

A Maple-munkalap egy idő után a matematikai tananyag természetes közegévé válik, segítségével valóban élő matematika közvetíthető a hallgatóknak. Nekik – főleg az első időben – a számítógép-algebrai nyelv elsajátítása jelentős többletmunkát jelent. Ám tapasztalatunk szerint a Maple elsajátítása a későbbiekben a teljesítőképes matematikatudás szintjének jelentős emelkedését eredményezi.

Összehasonlító tudásmérés

1999-ben a műszaki informatika szakos hallgatók körében összehasonlító tudásmérést végeztünk.

A számítógép-algebrai rendszer használatával alapvetően megváltozik a megoldható számítások, feladatok köre. Az összetett numerikus vagy szimbolikus számításokat igénylő feladatok, problémák megoldása a Maple használatával természetesen sokkal eredményesebb. Ezért is elsősorban nem a hallgatók abszolút teljesítményét, hanem megszerzett tudásuk szerkezetét hasonlítottuk össze. A megoldandó feladatokat három csoportba soroltuk:

– elméleti jellegű kérdések (T);
– döntően problémamegoldó gondolkodást igénylő feladatok (P);
– főleg számításokat tartalmazó feladatok (O).

A három kategória mindegyikében azonos pontszámot lehetett elérni.

A Maple-lel (38 fő), illetve az anélkül tanulók (23 fő) teljesítményeloszlása a következőképpen alakult:

	T (%)	P (%)	O (%)
Maple-lel tanulók	17,6	39,1	43,3
Kontrollcsoport	21,7	31,0	47,3

1. táblázat

Láthatóan a Maple-lel tanulók a problémamegoldó gondolkodást igénylő feladatokban jelentősen nagyobb arányban szereztek pontokat, mint a kontrollcsoport. A rendszer használata átsegítette a hallgatókat azon akadályok egy részén, amelyek a problémamegoldás közben a megosztott figyelem miatt a kézi számolás során sűrűn jelentkeznek.

A Maple-lel tanulók abszolút tudásszintje jelentősen felülmúlta a kontrollcsoportot. Előbbiek a megszerezhető pontok 58,5 százalékát, míg a kontrollcsoport tagjai 42,3 százalékát szerezték meg.

A vizsgálat az átfogó jellegű kérdéssor ellenére csupán pillanatfelvételnek tekinthető.

A számítógép-algebrai rendszer használata eredményességének megbízható megméréséhez vizsgálatok sorát kell elvégezni.

Összegzés

A számítógép-algebrai rendszerek napjainkra a matematikaoktatásnak és általában a matematikai feladatok, problémák megoldásának nélkülözhetetlen segédeszközévé váltak. Csak a didaktikai szempontból megalapozott használat lehet egyértelműen teljesítményt növelő. A tanítási-tanulási tevékenység és a tananyag szempontjából egyaránt meg kell vizsgálni a felhasználás lehetőségeit.

A fogalomalkotásnak, a használt eljárások, algoritmusok ismeretének legalább a korábbi szinten kell megvalósulniuk. Tehát a rendszer eljárásait témakörönként változó módon, de mindig úgy kell alkalmaznunk, hogy a fogalomalkotást segítse. A legtöbb témakörnél szükséges előbb kisebb méretű számításokat kézzel is elvégeztetnünk, s csak ezután szabad rátérnünk a számítógép használatára. Nagyon hatékony, bár időigényes a hallgatók által készített saját algoritmusok, eljárások használata.

A számítógép-algebrai rendszernek a matematikai foglalkozások mindig készenlétben álló eszközévé kell válnia, ugyanúgy, mint ez korábban a függvénytáblázattal, számológéppel történt.

Ugyanakkor alapozásként, kiegészítésként célszerű a számítógép-algebrai alapismereteket önálló kurzus keretében is oktatni.

Ezt a vélekedést a hallgatók körében végzett attitűdvizsgálat is alátámasztja, a hallgatók 80 százaléka igényelne ilyen kurzust.

A számítógép-algebrai rendszer didaktikai vizsgálatokon alapuló, a számítógéphálózat lehetőségeivel is élő használata a matematikai ismeretek spektrumának szélesedéséhez, a munkavégzés hatékonyságának növekedéséhez vezet.

Irodalom

WITTMANN, E. CH.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Vieweg, 1981.

DOBI JÁNOS: *Megtanult és megértett matematikatudás.* In: CSAPÓ Benő (szerk.): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, 1999. 169–190. old.

LESH, R. – POST, T. – BEHR, M.: *Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving.* In: JANVIER, C. (szerk.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum, Hillsdale. NJ. 33–40. old.

POPPER, K.: *Test és elme. Az interakció védelmében.* TYPOTEX Kiadó, 1998. 11–34. old.

JOHNSON-LAIRD, P. N. – WASON, P. C. (szerk.): *Readings in Cognitive Science.* Cambridge University Press, 1977.