A pozitív számok középértékei

FITOS LÁSZLÓ

Ebben a cikkben olyan bizonyítási módszert mutatok be, amellyel a számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép között fenálló egyenlőtlenségek három és több pozitív szám esetén ugyanolyan módon és ugyanolyan egyszerűen igazolhatók, mint két pozitív szám esetén.

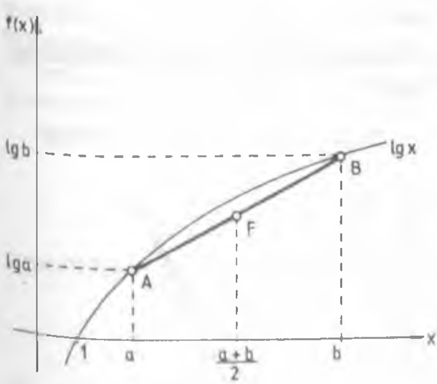
1. Legyen a és b ($a \le b$) két tetszőleges, pozitív, valós szám! Jelöljük a számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepüket az Sz, M, H és N kezdőbetűkkel! Azt kell bizonyítanunk, hogy

$$a \le H \le M \le Sz \le N \le b,$$

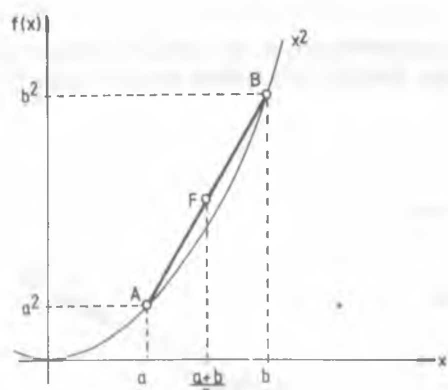
azaz

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b$$

Először a legismertebb $M \le Sz$ egyenlőtlenséget igazoljuk. Vegyünk fel a lgx függvény görbéjén tetszés szerint egy a abszcisszájú A és egy b abszcisszájú B pontot az $a \le b$ feltételnek megfelelően! (1. ábra) Mivel a lgx függvény a $0 \le x \le \infty$



1. ábra



2. ábra

intervallumban konkáv, ezért az AB húr F felezőpontja a függvénygörbe "alatt" van, következésképpan az F pont ordinátájára teljesül, hogy:

$$\frac{\lg a + \lg b}{2} \le \lg\frac{a+b}{2}$$

(ahol az egyenlőség akkor érvényes, ha a=b), azaz

$$\lg\sqrt{ab} \le \lg\frac{a+b}{2}$$

Ebből pedig, mivel az lgx függvény szigorúan monoton növekedő,

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

A H ≤ M egyenlőtlenség visszavezethető az előbb bebizonyítottra úgy, hogy a helyébe $1/a$-t és b helyébe $1/b$-t írunk, hiszen ha a>0 és b>0, akkor $1/a>0$ és$1/b>0$ is fennáll, továbbá

$$\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

átrendezéssel:

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$$

Az Sz ≤ N egyenlőtlenséget az x^2 függvény grafikonja segítségével bizonyítjuk be. Mivel az x^2 függvény görbéje a $0 < x < \infty$ intervallumban konvex, ezért a függvénygörbén felvett a abszcisszájú A és b abszcisszájú B pontot összekötő húr F felezőpontja a görbe "felett" van (2. ábra). Ezért az F pont ordinátájára fennáll, hogy:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

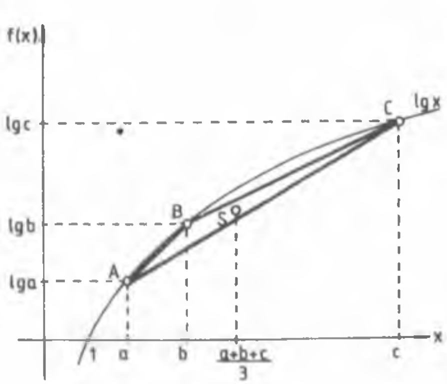
amiből négyzetgyökvonással kapjuk az

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

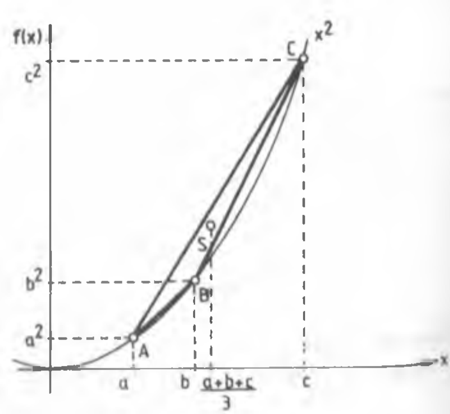
állítást, hiszen kisebb pozitív szám négyzetgyöke kisebb, mint nagyobb pozitív számé. Az egyenlőségjel itt is akkor érvényes, ha a = b. Az

$$a \le \frac{2ab}{a+b}$$

egyenlőtlenség a-val osztva és rendezve, ekvivalens az a + b ≤ 2b egyenlőtlenséggel, ami az a ≤ b feltétel alapján rögtön belátható.



3. ábra



4. ábra

A

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b$$

egyenlőtlenség négyzetreemeléssel és 2-vel való szorzással az

$$a^2+b^2 \le 2b^2$$

alakot ölti, ami az a $\le$ b feltétel szerint szintén igaz.

2. Ezután három tetszőleges, pozitív, valós szám: a, b, c (a $\le$ b $\le$ c) esetén bizonyítjuk be a harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepeik között fennálló következő egyenlőtlenségeket:

$$a \le \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \le b$$

Kezdjük most is az M $\le$ Sz egyenlőtlenséggel!

A lgx függvénygörbéjén az a feltétel szerint felvett, de egyébként tetszőleges a abszcisszájú A, b abszcisszájú B és c abszcisszájú C pontokat összekötve (3. ábra) egy ABC háromszöget kapunk, amelynek S súlypontja az ABC háromszög belsejében van, vagyis a görbe "alatt", hiszen a lgx függvény görbéje a $0<x<\infty$ intervallumban konkáv. Ezért az S súlypont ordinátája:

$$\frac{\lg a+\lg b+\lg c}{3} \le \lg\frac{a+b+c}{3},$$

vagyis azonos átalakításokkal:

$$\lg\sqrt[3]{abc} \le \lg\frac{a+b+c}{3}$$

és ebből

$$\lg\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3},$$

mert két pozitív szám közül az a kisebb, amelynek 10-es alapú logartimusa kisebb. Egyenlőség az a = b = c esetben érvényes.

Erre az egyenlőtlenségre visszavezethető a H(a;b;c) $\le$ M(a;b;c) összefüggés, ha a,b,c helyébe rendre $1/a$, $1/b$, $1/c$-t helyettesítünk.

Ugyanis a helyettesítéssel kapott

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}$$

egyenlőtlenség átrendezéssel a vele ekvivalens

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$$

egyenlőtlenségbe megy át.

Az Sz $\le$ N egyenlőtlenség bizonyítására itt is, mint két szám esetén, az x^2 függvény görbéjét használhatjuk fel (4. ábra). Az A(a;a^2) B(b;b^2); és C(c,c^2) pontok által meghatározott ABC háromszög S súlypontja az x^2 függvény grafikonja "felett" van, vagyis az S pont ordinátájára:

minthogy az x^2 függvény a $0<x<\infty$ intervallumban konvex. ebből pedig

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

mert az x^2 függvény a $0<x<\infty$ intervallumban szigorúan monoton nő.

Az

$$a \le \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab+ac+bc}$$

illetve

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \le c$$

egyenlőtlenségek rendezéssel az

$$ab + ac + bc \le 3bc,$$

illetve

$$a^2+b^2+c^2 \le 3c^2$$

alakba mennek át, amelyek az $a \le b \le c$ feltétele alapján nyilvánvalóan igazak, tehát az eredetiek is fennállnak. Az egyenlőség mindenütt az $a = b = c$ esetben érvényes.

3. A háromnál több, de véges számú pozitív, valós szám fenti közepei között is ugyanaz a nagyságbeli sorrend, mint két vagy három szám közepei esetén. Továbbá most is ugyanazokkal a függvénygörbékkel és ugyanolyan módon végezhetjük a bizonyításokat, mint a 2. részben, de itt a függvénygörbébe írt $A_1A_2...A_n$ ($n \le 4$) konvex sokszög S súlypontja nem a sokszöglap súlypontját, hanem a sokszög csúcsainak mint pontrendszernek a súlypontját jelenti és ez mindig a konvex sokszög belsejében van (lásd Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* Budapest, 1966. 305-306. és Szikszai József: *A hatványközepek,* Budapest, 1987. 49-51.). Tehát az S pont a görbének mindig ugyanazon az oldalán (partján) van, amelyiken a beírt konvex sokszög. És ez a körülmény (tétel) a bizonyításnak döntő momentuma.

4. Besorolhatjuk az eddig tárgyalt közepek közé az ½ kitevőjű hatványközepet (más néven négyzetgyökös közepet) is. Jelöljük NGy-vel! Az a és b pozitív, valós szám n kitevőjű hatványközepe:

$$\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ebből az ½ kitevőjű hatványközepet az $n = ½$ helyettesítéssel kapjuk:

$$\left(\frac{a^{½}+b^{½}}{2}\right)^2,$$

azaz

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

Ez a középérték a mértani és a számtani közép közé esik:

$M \le NGy \le Sz$, vagyis

$$\sqrt{ab} \le \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \le \frac{a+b}{2}$$

Bizonyítás:

Az egyöntetűség kedvéért bizonyítsunk itt is függvénygrafikonokkal! A lgx függvény grafikonján az a b feltételnek megfelelően felvett $A(\sqrt{a};\lg\sqrt{a})$ és $B(\sqrt{b};\lg\sqrt{b})$ pontot öszekötő húr F felezőpontjának ordinátája (5. ábra):

amiből

$$\sqrt{ab} \le \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

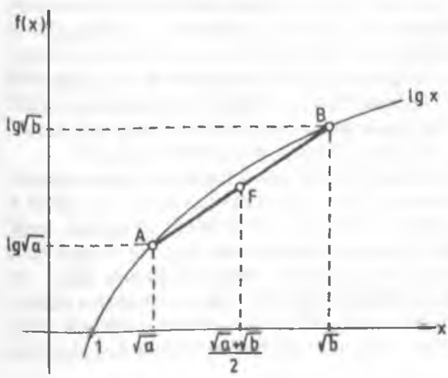
Az NGy ≤ Sz egyenlőtlenség bizonyítására a $\sqrt{x}$ függvény görbéjét használhatjuk fel (6. ábra). Az A(a;$\sqrt{a}$) és B(b;$\sqrt{b}$) pontokat összekötő húr F felezőpontja a görbe "alatt" van, ezért a felezőpont ordinátája:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \le \sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

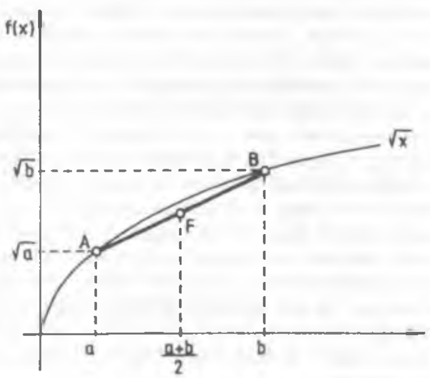
amiből négyzetre emeléssel:

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \le \frac{a+b}{2}$$

A mértani négyzetgyökös és számtani közép közti összefüggést három és több pozitív szám esetén is a lgx és a $\sqrt{x}$ függvény grafikonja segítségével ugyanolyan módszerrel bizonyíthatjuk, mint két pozitív szám esetén, és úgy, ahogy azt a 2. és 3. részben tettük.



5. ábra



6. ábra

IRODALOM

Késedi Ferenc: *Egyenlőtlenségek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

Korovkin, P. P.: *Egyenlőtlenségek* (Középiskolai szakköri füzetek), Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

Szikszai József: *A hatványközepek* (Középiskolai szakköri füzetek), Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.