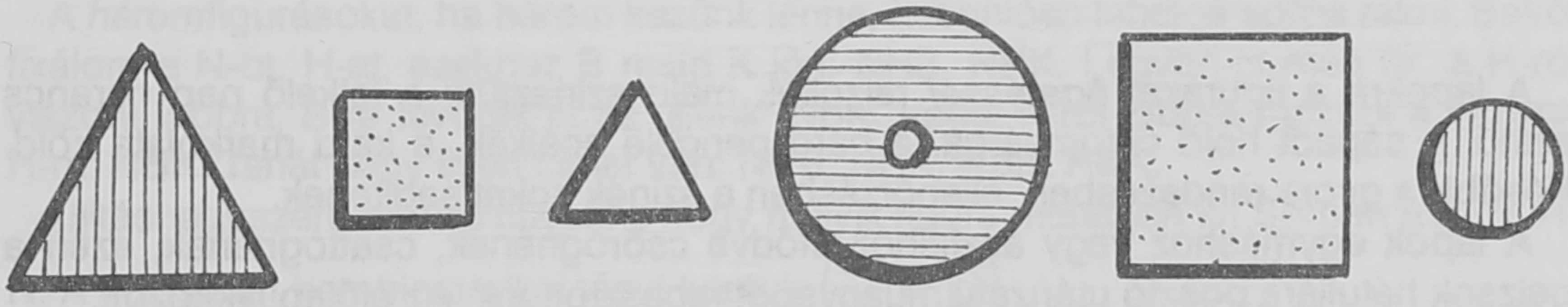
Halmazokról, kombinatorikáról játékosan

KOVÁCS ZOLTÁN

Ajánlom ezt az írást azoknak, akik 9-16 év közötti gyerekekkel foglalkoznak és kezük alatt tehetséges fiatalok is vannak; akik a tanórai foglalkozást magától értetődő módon toldanak meg szakkörrel; akik a néhány, központilag (20 éve!) küldött taneszközt már únják; akik cselekvően nyitottak újabb módszerek iránt; akik nemcsak a matematika egyes témakörei közötti, hanem a tantárgyakat elválasztó határokat is átjárhatónak vélik (pl. matematika-rajz-technika); akik a manuális munkától sem idegenkednek (legalább is nógatják környezetüket tanszerek tervezésére, készítésére); akikkel előbb-utóbb összejövünk, hogy kölcsönösen tanuljunk egymástól.

A *logikai játék* néven ismert tanszer sokoldalúan használható az iskolában, *kizárólagos* alkalmazása azonban szegényíti a gondolkodást. Vegyük kritikusan szemügyre ezt a taneszközt. Már a neve sem szerencsés, mert túl általános. Tulajdonság lapoknak vagy ilyesminek kellene hívni. A figurák négyféle szempont szerint osztályozhatók.

Szín szerint négyfélék. *Alak* szerint: háromszög, négyzet, kör. (Szerencsésebb, mint a Romániában használt Joc de logica mert abban például négyzet mellett "téglalap"-nak mondott is van. Ezeket megkülönböztetve(!) sajnos pofont adunk annak a szívós tanításnak, miszerint a négyzet is téglalap.)



Felület szerint ilyesféle megfeleltetés kellene: fényes – matt, síma – barázdált, rücskös. Helyette a gyermekded lyukas – nemlyukas a választék. (Tulajdonképpen lyukdalt azaz *perforált* lenne, csak a gyártás miatt *egy* lyuk lett a sok kicsi helyett.)

Nagy – kicsi, mondogatjuk a *nagyság* szerinti megkülönböztetéskor, pedig a "nagy" tulajdonképpen "nagyobbat" jelent most, tehát nem tulajdonságot, hanem *relációt*! (Nem árt ezt a tanítók körében is tudatosítani. Persze hozzá lehet szokni a kétféle mérethez, de akkor is jogos a kötözködés.)

Annyira megszoktuk ezt a tanszert, hogy nehéz gyökeresen mást elképzelni. (A tanítójelöltek első évfolyamon szorgalmi feladatul kapják, hogy tervezzenek, készítsenek másmilyen logikai készletet. Sajnos, többnyire naív dolgok születnek.)

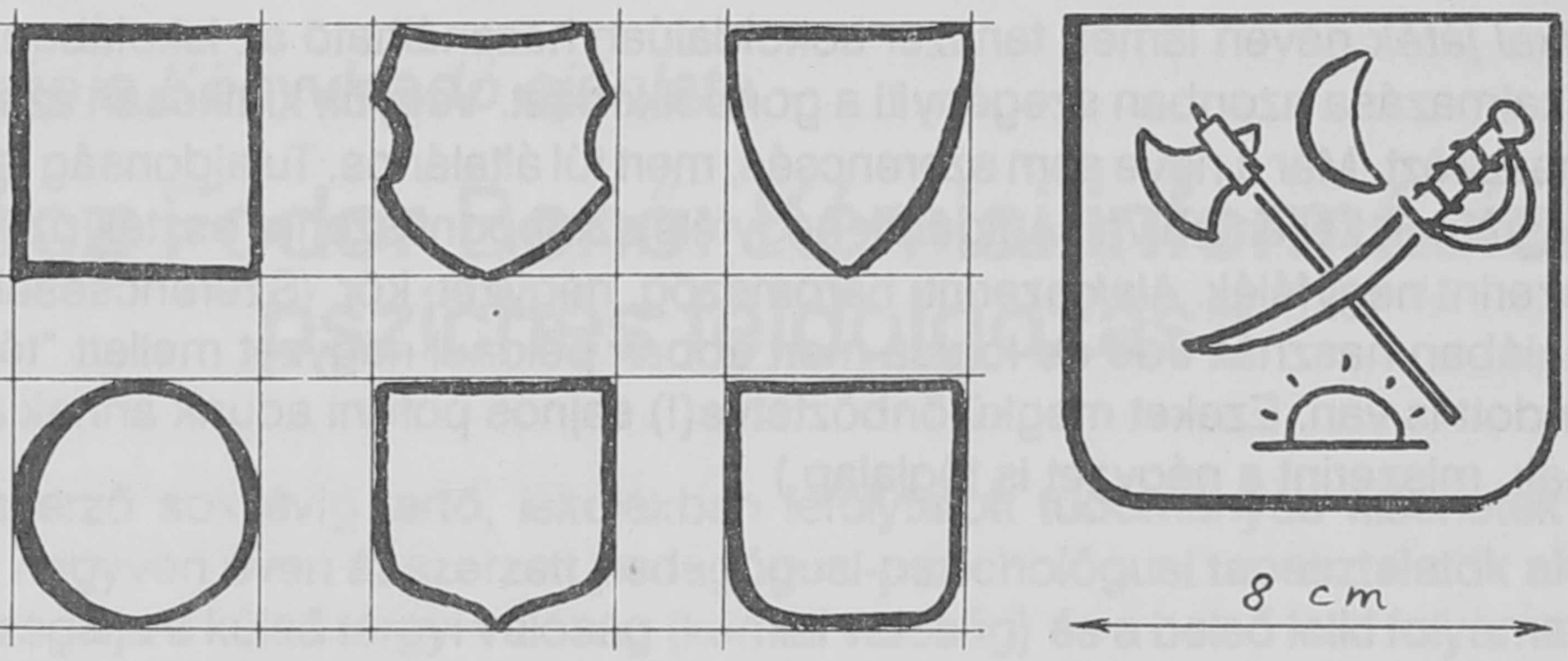
Valami más

Mielőtt tanítványaink körében a *halmazműveletekkel* foglalkoznánk, érdemes bemutatni kettő, három, négy halmaz egymáshoz való viszonyát. Erre és a hozzákapcsolódó kombinatorikai meggondolások szemléltetésére szolgál a *címerjáték* nevű tanszerem. Megtervezéséhez *Dienes Zoltán* 1972-es budapesti tanfolyama adta az inspirációt. Az alapötletet tovább fejlesztettem a motívumok gondos megválasztásával és a hordozólapok igényes kidolgozásával. Tanítványaim segítségével több szériát készítettem, módszertani órákon rendszeresen használjuk őket, és *gyűjtjük* a készlettel kapcsolatos újabbnál újabb feladatokat! Szívesen veszünk minden ötletet a tanszer alkalmazására. (Ezúton köszönöm *Földvári Vera* hasznos megjegyzéseit is.)

Külön felhívom az igényes olvasó figyelmét a készlet *szűkítésére*, bővítésére, formai *variánsokra*, a harmadik *dimenzió* meghódítására.

A lapok 8 x 8 cm nagyságú, 5 mm vastag furnírlemezek. Kissé kerekített a két alsó sarka mindegyiknek, hogy *címerre* emlékeztessenek. (A pajzs alsó csücskéről le kell mondani, hogy a lapok egymáson elcsúsztathatók legyenek.) Elsőként helyes állásba kell forgatni az asztalra ömlesztett címereket.

A *motívumok* a következők (jól pattogó egytagú szavak): nap, hold, bárd, kard. Betűvel hivatkozunk rájuk: N, H, B, K. Van több olyan címer, amelyen két motívum található; néhányon három, másokon csak egy. Az egyik címer pedig üres (csupasz, jeltelen), biztosan tévedésből (!) került a készletbe.



A lapokra a figurákat *égetéssel* rajzoltuk majd színeztük: a felkelő nap narancs színű, a sápadt hold citromsárga, a bárd pengéje acélkék, a kard markolata zöld. Később a gyors rendezésben, ellenőrzésben a színek sokat segítenek.

A lapok egymáshoz vagy asztalhoz ütődve csörögnének, csattognának, ezért a pajzsok hátuljára posztó utánzatú műanyagot ragasztottunk. Az előlap lakkozott.

A tanítási gyakorlatban először minden eszközt úgy használ a gyerek, *ahogy akarja*. Semmilyen szempontot nem adunk. Szemináriumokon a tanítójelöltek körében is így szoktam. Elvárom, hogy mindenki találjon a készlettel kapcsolatban 3-4 ötletet. A szellemeseket óra végén összegyűjtve, 6-8 féle is adódik. (Megjegyzés: Nem szükséges minden lapot mindig felhasználni.)

Általában a következő játékszabályok fogalmazódnak meg:

1. Kiválasztom a *napokat* (helyesen: a napokat is tartalmazó címeket) egy kupacba, a többivel nem törődöm.

Kérdés: Hány nap-os van? Nyolc. (Tegyük vissza őket. Keverjük meg. Ha valaki a kardosakat gyűjti?! Az is 8 darab. 8 nap + 8 kard + 8 bárd + 8 hold, az 32 lenne. Ugyan, számoljuk meg a készletet! Hoppá: csak 16 darabos!

2. Kiválasztom a két *égitestet*. (Helyesen: azokat a címereket, amelyeken nap vagy

– megengedően értve – hold látható.)

Megjegyzés: A motívumok feléről van szó, mégis a címerek 3/4-része esik gyűjtőkörünkbe!

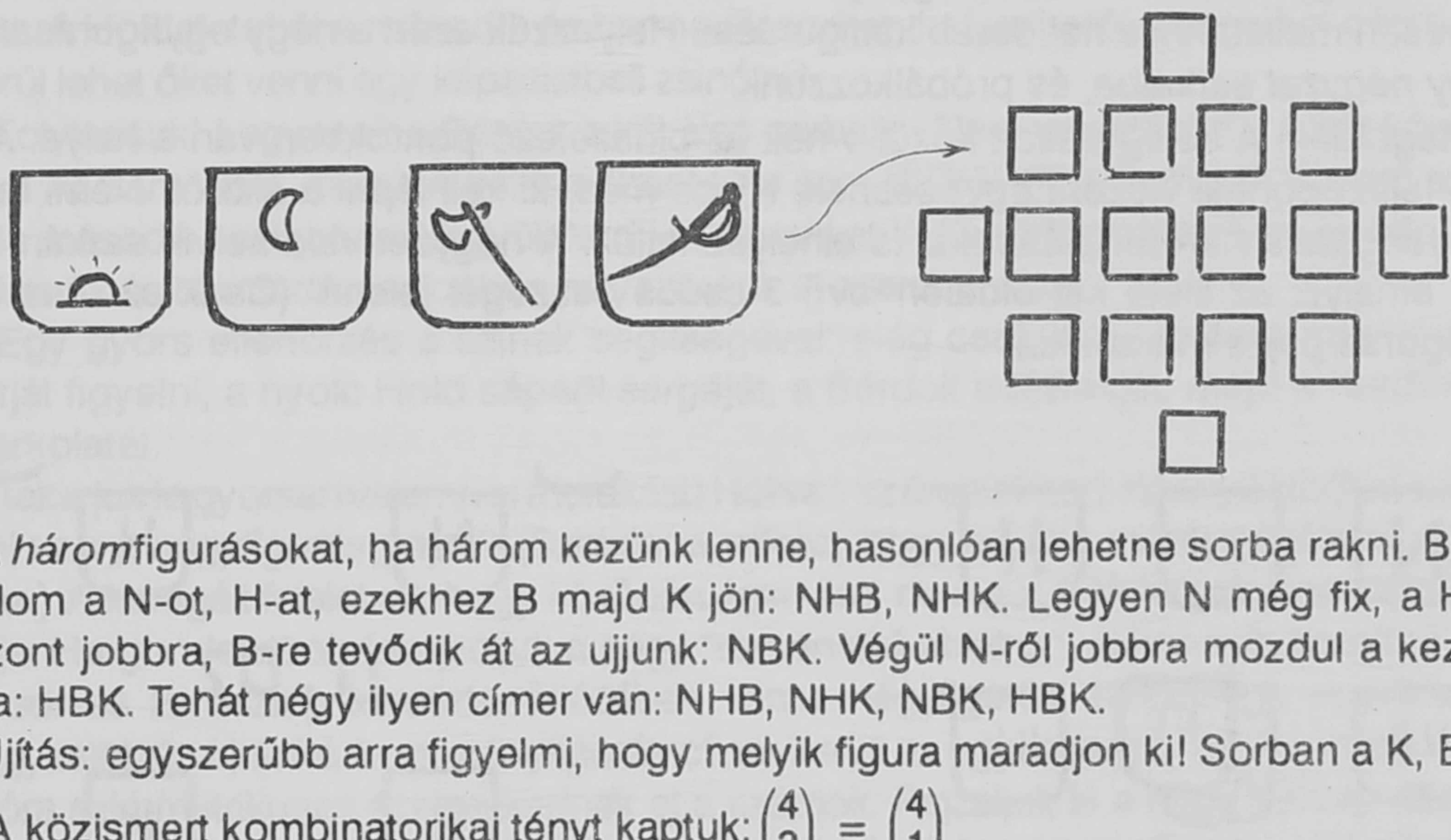
3. *Csatárláncot* készítünk. Bárd, kard, hold, nap az első négy lapon, majd a sok kétmotívumos, azután a hármasok, végül a négy jelképet tartalmazó egyetlen pajzs zárja a sort.

Kérdés: Ne csapjuk az üres címert a sor végéhez? Vagy azzal kezdjük a láncolatot?!

4. Következzék most a *motívumok száma* szerinti rakosgatás. Tördeljük eszerint sorokba a láncolatot: az egyfigurás lapok alkotják az első sort. Célszerű valamilyen sorrendben megállapodni!

Mi a nap, hold, bárd, kard sorrendben a rendező elv? Például az idő. Előbb volt a jó öreg Napunk, később a Holdunk; bárddal (baltával) talán régebben ugranak egymásnak az emberek, mint karddal.

Ha ezt elfogadjuk, akkor hogyan alakul a *kétfigurás* címerek *sorrendje* a következő sorban? Ahogy kombinatorikában tanultuk balról; (betűt használva rövidítésül) N-hez H, majd B, végül K. Azután átteszem a bal kezemet H-ra, ehhez (jobb kézzel mutatva) B, majd K. És így tovább. Tehát NH, NB, NK; HB, HK; BK a (hatféle) helyes sorrend. Emlékezzünk: négy közül kell kettőt kiválasztani! A sorrend nem számít, hiszen pl. hold és kard vagy kard és hold ugyanazt a címert jelenti. Tehát *kombinációról* van szó, négy alatt kettő - azaz hat. Mennyivel hangulatosabb így, játék révén megkapni ezt az eredményt!



A *három*figurásokat, ha három kezünk lenne, hasonlóan lehetne sorba rakni. Balról fixálom a N-ot, H-at, ezekhez B majd K jön: NHB, NHK. Legyen N még fix, a H-ról viszont jobbra, B-re tevődik át az ujjunk: NBK. Végül N-ről jobbra mozdul a kezünk H-ra: HBK. Tehát négy ilyen címer van: NHB, NHK, NBK, HBK.

Újítás: egyszerűbb arra figyelmi, hogy melyik figura maradjon ki! Sorban a K, B, H, N. A közismert kombinatorikai tényt kaptuk: $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$

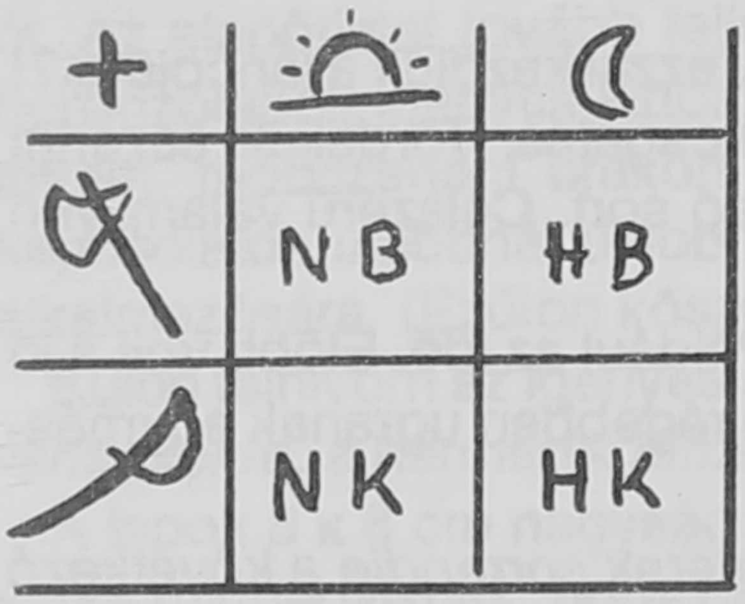
A Pascal-háromszög szimmetrikus.

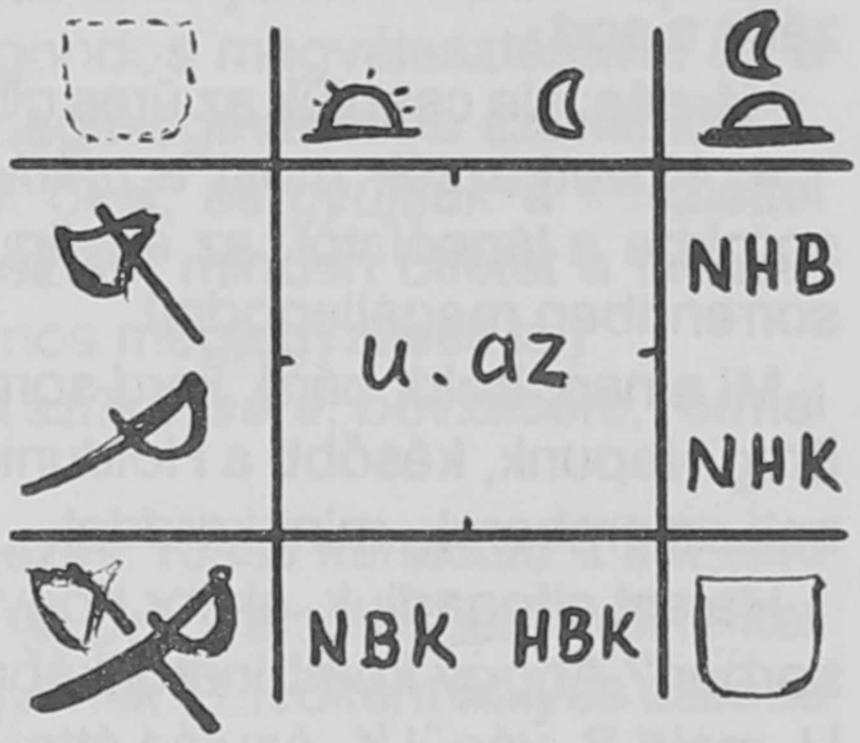
Azt, hogy hány darabos a készlet, alkalmas jelölés révén is megkaphatjuk. Minden címerlap esetében írjuk le mind a négy betűt, majd tegyünk vonást az egyes betűk fölé, ha az hiányzik a pajzsról. A négyfigurástól az üresig haladva a sorrend így alakul:

NHBK; NHBK, NHBK, NHBK, NHBK;
NHBK...; NHBK...; NHBK

Azaz 1+4+6+4+1 = 16. Ezt az számot rövidebben is kiokoskodhattuk volna: az NHBK rendezett négyes első betűje fölé teszek vonást vagy sem. A második betűnél szintén megvan e két lehetőség stb. A független lehetőségszámok összeszorzódnak: 2 x 2 x 2 x 2 = 16.

5. *Összetevős táblázatok.* A felső vízszintes margón legyen a két égitest, a bal szélén a két fegyver. A négy belső mezőbe az "összeadás" szabálya szerint kerülnek a kétfigurások.

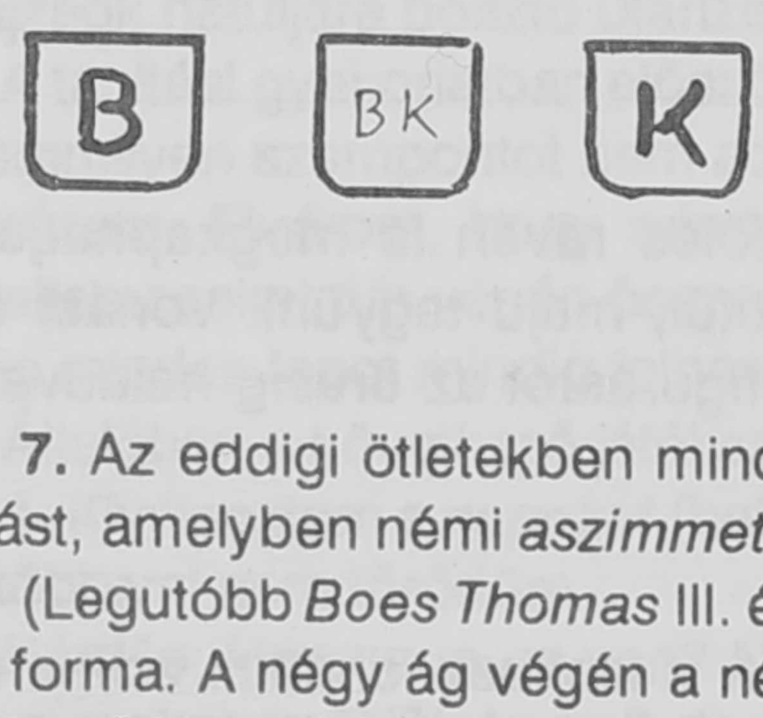


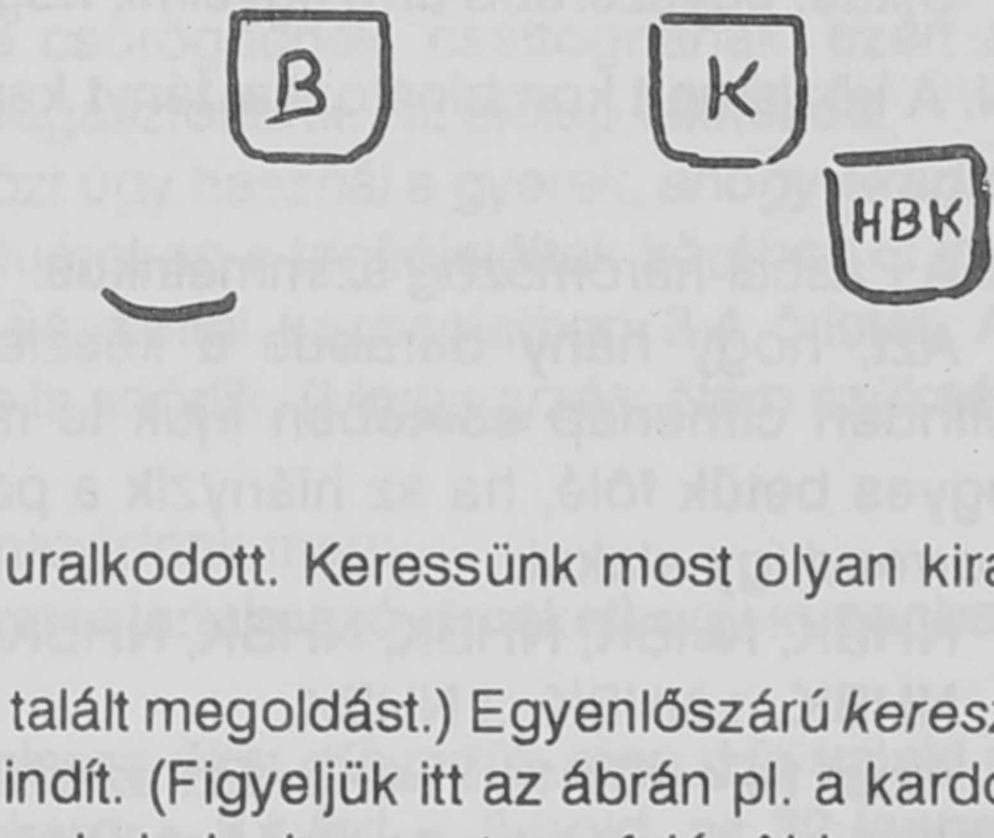


Tovább folytatva, a gondolat ugyanaz, de már a margón is történik összeadás. Minden címernek van helye: a jobb alsó mezőbe jut a 4-figurás, az üres pajzs pedig a +jel helyére illik tartalmilag.

6. Az egy sorba rendezett egyfigurás címerekhez származtatás szerint nem lehet ügyesen mellétenni a hat darab kétfigurásat. Helyezzük ezért a négy egyfigurásat egy *nagy négyzet* sarkaiba, és próbálkozzunk.

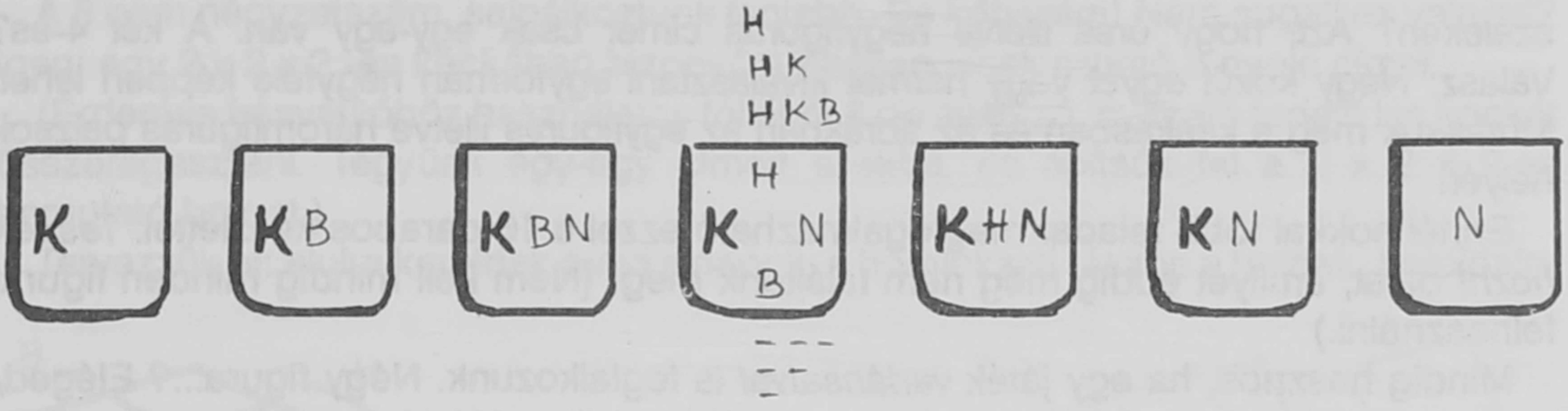
Megoldás: A kétfigurások közül 4-nek az oldalfelező pontokban van a helye. A két átló felezőpontjai viszont egybeesnek. Nincs más, ki kell lépni a síkból. Némi találékonysággal a háromfigurásokat is elhelyezhetjük. A négyzet valamelyik sarkán kívül azt, amelyik az illető két oldalon levő 3 csúcs összegét jelenti. (Csak az üres és a telifigurás pajzs maradt ki.)





7. Az eddigi ötletekben mindig szimmetria uralkodott. Keressünk most olyan kirakást, amelyben némi *aszimmetria* is van.

(Legutóbb *Boes Thomas* III. éves hallgatónk talált megoldást.) Egyenlőszárú *kereszt* a forma. A négy ág végén a négy egyfigurás indít. (Figyeljük itt az ábrán pl. a kardot jelentő K betűt.) A K mellé jön egy új figura, így haladunk a centrum felé. Ahhoz egy harmadik motívum. Középre ilyen logikával a négyfigurás címer kerül. Ugyanebben a sorban jobbról indítva viszont *csak 5 db* N pajzs található!



Hasonlóan a függőleges ágakban 6 db Holdas és csak 5 db Bárdos címer adódik. Itt az aszimmetria! Sőt a kimaradt lapok is furcsák: az üres mellett a NB-s és a NH-s címer!(?)

8. Igen tanulságos a következő feladat. (Ezt már többnyire sugalmazni kell, maguktól nemigen találnak rá az emberek.) Mivel 16 darabból áll a készlet, rendezzük el a címereket egy 4 x 4-es négyzetben. Tegyük meg, először semmi rendet nem tartva. Fogalmazzunk szabályokat. Legyenek a felkelő *Napok az alsó két sorban*, hogy *Venn-diagram módjára* körülkanyaríthassuk őket. (Néhány cserével elérhető.) Hasonló a kívánság a többi figurával kapcsolatban is.

Legyenek a *Holdak* pl. a két felső sorban... Nem lehet, mert van NH-as figura (több is)! Ugyanaz a probléma, mint amikor a piros illetve a háromszögletű logikai lapokat külön körbe akartuk betenni. Nyilván *metszetet* kell alkotni, ami most a második sor lesz. A Holdak tehát a második és harmadik sorban helyezhetők el egy-két csere árán. Körül lehet őket venni egy képzeletbeli zsinórral.

Folytassuk! Legyenek a *Bárdok* a két alsó sorban... Nem megy, mert... A két középsőben! Az sem lehet, mert... A két felsőben! Úgy sem sikerül. Elhelyezhetők viszont az első és a második *oszlopban*. Vegyük körül az ujjunkkal. A *Kardokat* ugyanilyen gondolattal a második és harmadik oszlopban helyezhetjük el csereberékkel.

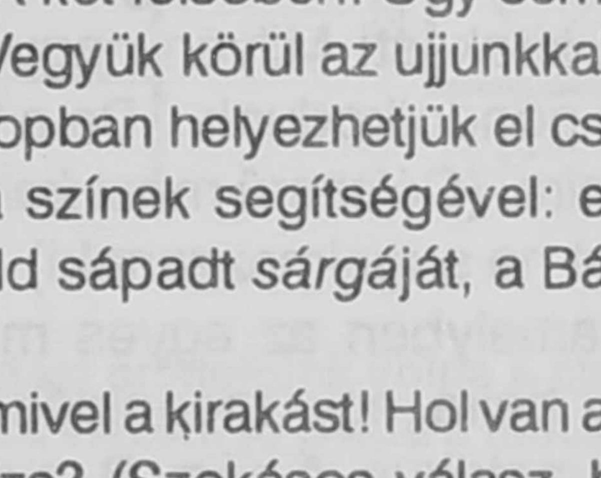
Egy gyors ellenőrzés a színek segítségével: elég csak a *nyolc* Nap *narancs*színű foltját figyelni, a nyolc Hold sápadt *sárgá*ját, a Bárdok acél*kék*jét, majd a Kardok *zöld* markolatát.

Takarjuk le gyorsan valamivel a kirakást! Hol van az *üres* címer? Könnyű kibökni a helyét. Hol van a *négyfigurás* pajzs? (Szokásos válasz, hogy az átló másik végében, de nem igaz.) A korrigált felelet az, hogy középen. Igen ám, de a 4 x 4 címernek nincs középmezője. Ha gondolatban felrajzoljuk a négy "pizstílű ablakot", akkor nyilvánvaló, hogy a 2. sor és 2. oszlop kereszteződésében van a négyfigurás. Készítsünk egy 4 x 4-es négyzetet, és írjuk fel, hogy hányfigurás címer került az egyes mezőkbe. Az előbb említett átlóra szimmetrikusan szelyezkednek el a számok. Rajzoljuk le a négy halmaz általános esetét szemléltető szokásos négy "románstílű ablakot" és vessük össze a két rajzot.

Hol az üres pajzs helye? Hol vannak az egyfigurások, hol a 6 db kétfigurás stb.?

Állítsuk elő a *Pascal-háromszög* negyedik sorát! Mit jelent készletünkben a két 1-es a

1	2	1	0
2	3	2	1
3	4	3	2
2	3	2	1



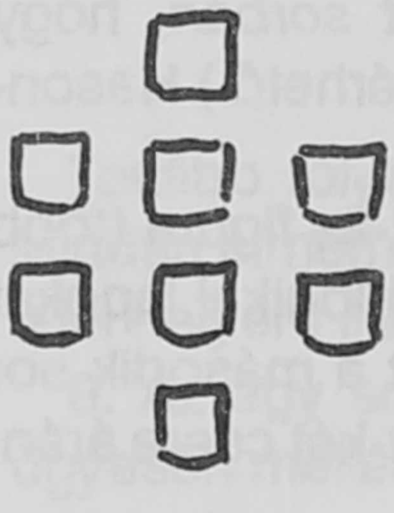
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

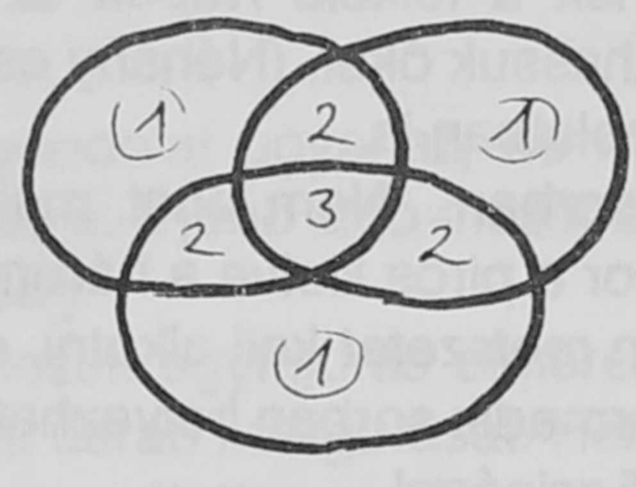
széleken? Azt, hogy üres illetve négyfigurás címer csak egy-egy van. A két 4-es? Válasz: Négy közül egyet vagy hármat kiválasztani egyformán négyféle képpen lehet. Mutassuk meg a kirakásban és az ábrákban az egyfigurás illetve háromfigurás pajzsok helyét!

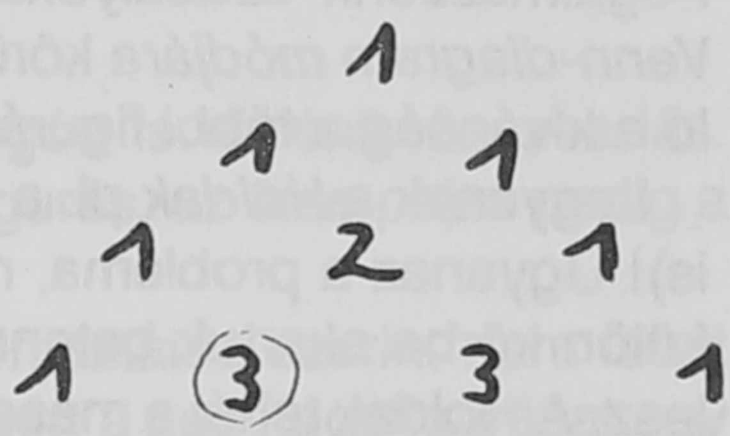
Ennél sokkal több feladat megfogalmazható ezzel a 16 darabos készlettel. *Tessék hozni* olyat, amilyet eddig még nem találtunk meg. (Nem kell mindig minden figurát felhasználni.)

Mindig hasznos, ha egy játék *variánsaival* is foglalkozunk. Négy figura...? Elégedjünk meg *csak hárommal*. Kapkodjuk ki a kardokat! Marad N, H, B motívum. Nyolcdarabosra apad a készlet. Gyorsan végigfut agyunkban néhány eddigi gondolat: NHB, NHB, NHB,... Teszek tagadást jelző vonalkát a betű fölé vagy nem: 2 x 2 x 2 = 8 darabos lesz a készlet. Stimmel!

Az elemek száma szerinti elrendezést az ábra mutatja. (A pajzsok sorrendjére a két középső sorban most is vigyázzunk.) A Pascal-háromszög harmadik soráról van szó. Három halmaz általános esetében Venn-diagramját kell felrajzolnunk.



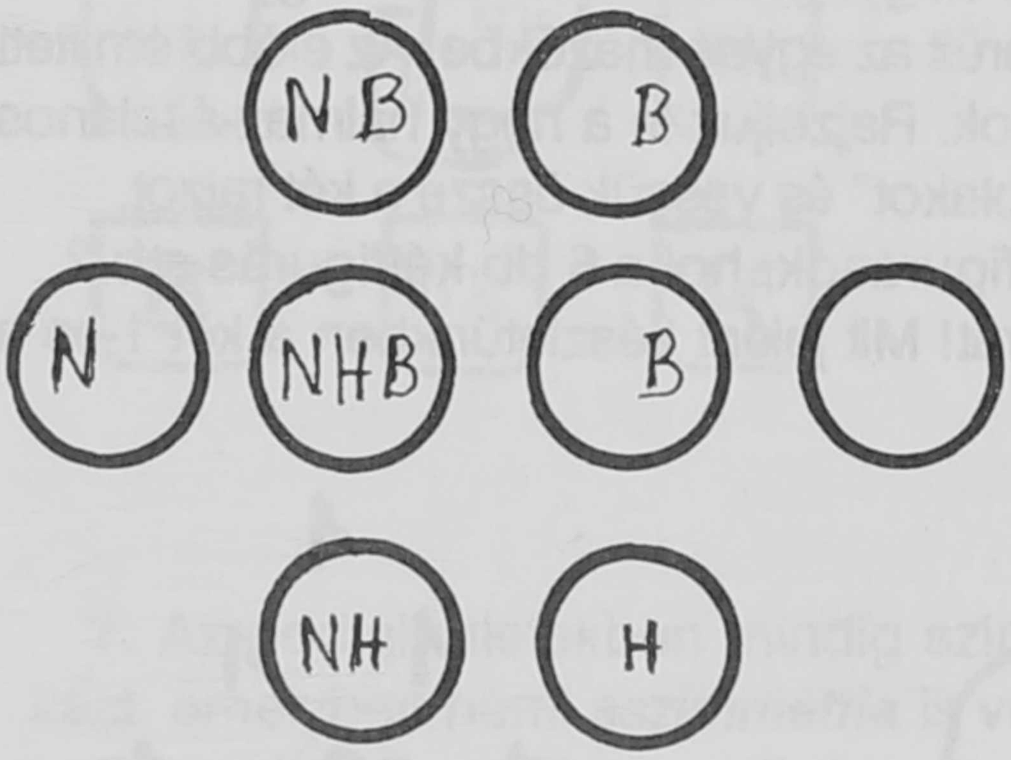


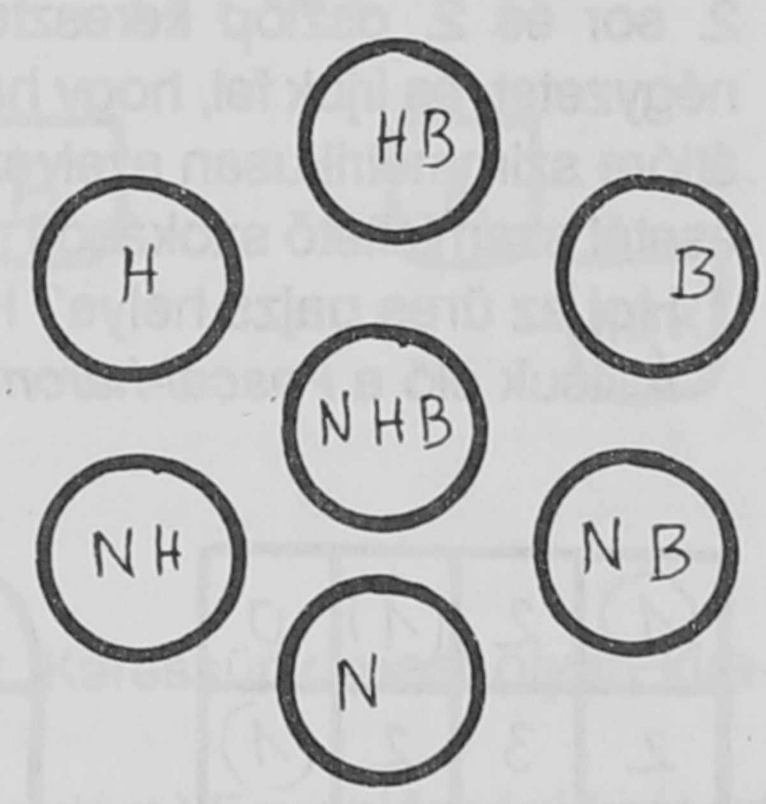


Az összetevős táblázat most nem négyzet, hanem hosszúkás téglalap lesz. Rakja ki a tisztelt olvasó a 6. és 7. pont alatt leírt feladatok megfelelőjét is!

Próbáljuk meg a 8. pontban leírt kirakást! Milyen nagy úr a megszokás: most is négyzetbeli sorokban, oszlopokban gondolkodunk... De a 8 nem négyzetszám! Gondoljunk viszont a három halmaz köreire. (Célszerű most *kerek pajzsokra* rajzolt figurákat használni, hogy semmilyen irányt ne sugalmazzanak!)

Készítsünk tehát olyan kirakást, amelyben az egyes motívumok Venn-diagramm módjára körülkanyaríthatók! Alább, balra egy megoldás, amelyben mind a nyolc figurának van helye, s a kirakás szimmetrikus. A négy B, a négy H négyzet alakú foltot foglal el. A négy N viszont nem!



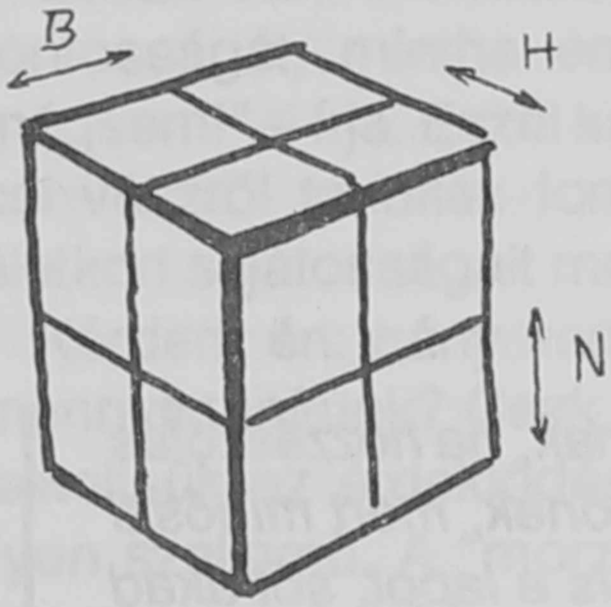


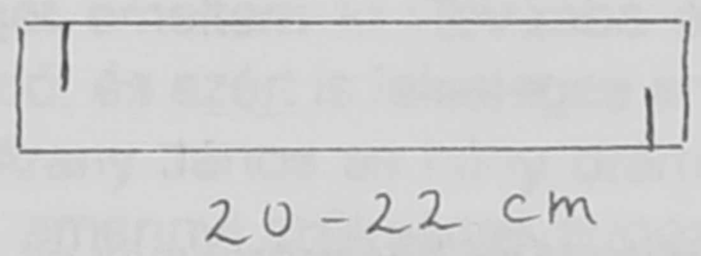
A jobboldali megoldásnál már mind a három figura azonos (rombusz) alakú foltban helyezkedik el. Így viszont az üres címernek nincs helye (a síkban). Megjegyzés: hatszögletű pajzsok szorosan illeszkednének.

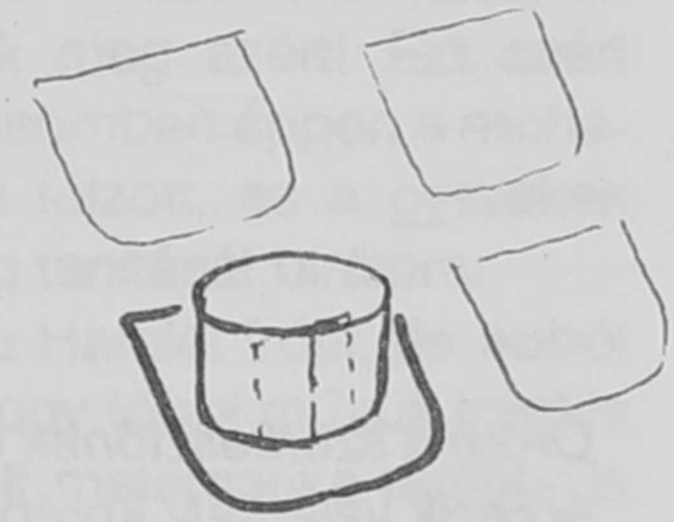
A 8 nem négyzetszám, sajnálkoztunk fentebb. De *köbszám*! Nem sugall ez valamit? Igen: egy 2 x 2 x 2 -es kockában bizonyára okosan elhelyezhető a nyolc címer.

(Érdemes írásvetítőhöz használatos fóliából 8 db átlátszó, nyitható fedelű kis kockát összeragasztani. Tegyünk egy-egy címert ezekbe, és építsük fel a 2 x 2 x 2-es bemutató box-ot.)

Tervezzük el: alulra kerülnek majd a napok, a homlokzati részbe a holdak, baloldalra

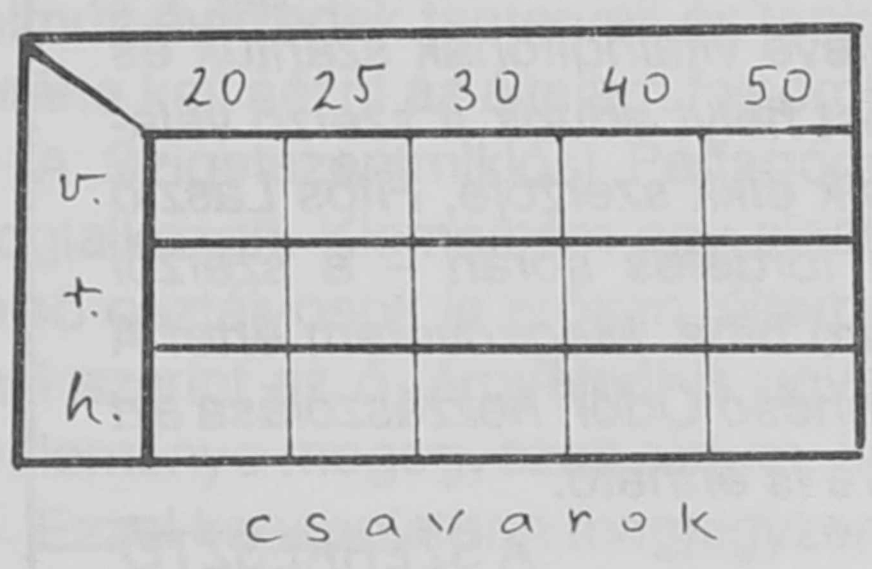


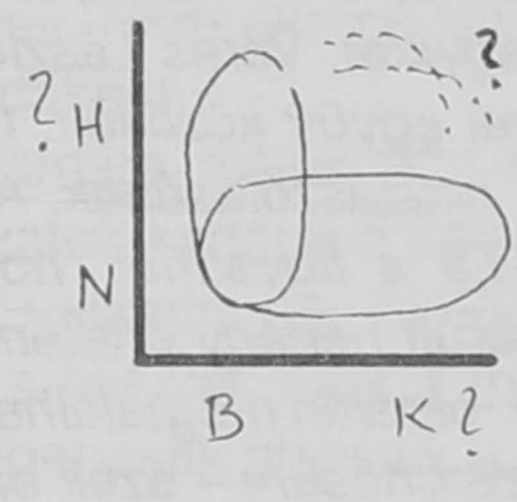


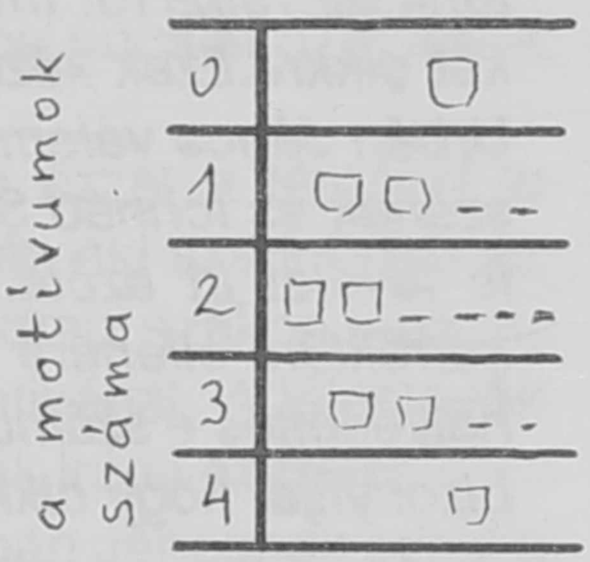


pedig a bárdok. Viccesen így csinálhatunk számadást: négy nap, négy hold, négy bár, az üressel együtt 13.(!)

Kitérő: Egy fémipari ember rendet akar csinálni a csavarjai között. Hosszuk szerint mondjuk 20, 25, 30, 40, 50 mm-eseket talál. Anyaguk (felületkezelésük) szerint pedig vas, réz, horganyzott adódik. A teljes rendet egy 5 x 3 = 15 mezőből álló ugynevezett *Caroll-diagram* fejezi ki. Minden csavarnak egyértelmű a helye?







Ilyen kétszempontos felosztást erőltettünk volna a címerekre is, de természetesen nem ment. (Egyszempontos osztályozásra viszont jó példa a motívumok száma szerinti sorokba rendezés. Lásd a 4. pontot.)

Az átlátszó kis kockákba *apró tárgyak* is tehetők, ezért hasznosak. Sok darabot készítve *háromszempontos* (térbeli) Caroll-diagramot szemléltethetünk velük. A lapos címereket egyszerűbben is rakhatjuk a térbe. Átlátszó fóliából vágjunk 20-22 cm hosszú 4-5 cm széles csíkokat. Helyezzük a 4 db nap-os címert négyzet formájában az asztalra. A csíkok besliccelésével alakítsunk ki henger alakú *távtartókat*, amelyekre jön a többi négy címer. Cserékkel érjük el, hogy mind a három motívumot egyenként "körül kanyaríthassuk".

A téma ilyetén körbetapogatása után az olvasó már sejti, hogy a szerzővel együtt milyen házi feladatot kap. Dolgozzuk ki az *ötfigurás* címerjáték *analóg feladatait*!