Hozzászólások

Öröm a szerkesztőnek és vélhetően hasznára válik az olvasónak, ha hozzászólás érkezik valamely korábban közölt cikkhez. Öröm a szerkesztőnek, mert minősíti a munkáját: van érdeklődés. Nem csak veszik, de olvassák is a lapot, sőt akad akit az olvasottak nemcsak véleményformálásra, de tettre is késztetnek és tollat ragad; vitába száll vagy helyesel, esetleg kiegészít. És hasznos lehet az olvasónak, mert feltárulhatnak részletek, felbukkanhatnak összefüggések, amelyekre a szerző nem gondolt vagy csak ő tudja, miért nem szólt róluk. Különösen így van ez akkor, ha a borítékok nem csupán néhány soros hozzáfűznivalót hanem szinte tanulmányértékű eszmefuttatást takarnak. Nemrégen egy-egy ilyen reakciót kaptunk az 1992/10. (matematika, informatika, technika 4.) számunkban megjelent két cikkre.Ezek közül az egyiket, Veres Lászlóét eleve vitaindítónak szántuk és Urbán János véleményével együtt közöltük. Itt most helyt adunk a szerző válaszának és Ichnád Sándor hozzászólásának. A másik cikk szerzője, Fitos László is levelet írt azóta. Felhívja a figyelmet, hogy a tördelés során – a szerzői korrektúra ellenére – bekerült néhány értelemzavaró hiba. Megkövetem érte! A helyesbítés e számunk 66. oldalán megtalálható. Vancsó Ödön hozzászólása azt bizonyítja, hogy cikke – szerencsére – ezek ellenére is érthető.

A SZERKESZTŐ

Veres László megjegyzései

Elöljáróban két dologról szólok, az egyik egy sajtóhiba a 10. szám 48. oldala negyedik bekezdésében helyesen: korrepetáltatnak. A másik: a 49. oldalon említett 17 fős csoport május 14-én felmérő dolgozatot írt síkgeometriai szerkesztések és vektorok témakörből. Eredmény 3 db kettes, 14 db egyes.(?!)

Írásommal egyidőben két reagálás jelent meg rá. Kíváncsian vártam, hogy a következő számban milyen véleményen lesznek. Amikor megjelent a 11-12. összevont szám, meg kellett állapítanom, hogy semmilyenek. Ennek három oka lehet: 1. kevesen olvassák a folyóiratot, 2. közömbösség, akárcsak a politikában, 3. a szerkesztő nem tartotta érdemesnek közölni őket.

Akármelyik áll fenn, mindenképpen szomorú. Így csak két emberrel vitatkozhatok. Midkettő elismeri, hogy a tanulók túlterheltek. Ebből szerintem következik, hogy változtatni kell, mégpedig sürgősen. A szerkesztő nem ért egyet a túlfeszített húr megeresztésének a cikkemben javasolt módjával. Nekem az a véleményem, hogy ez a húr már rég elszakadt, csak a dolgozatomban említett oktatási szakemberek nem vették észre, vagy nem akarják észrevenni. Megismétlem: másolások tömkelege, korrepetáltatások magántanárokkal, elégtelen osztályzatok sokasága stb. mutatja ezt. Május 20-án reggel hangzott el a rádióban, hogy már az alsó tagozatosok kb. 30%-a is neurotikus.(?!) Szerintem valószínűsíthető, hogy a túlzó és a sokak számára teljesíthetetlen követelmények miatt. Később a felsőbb tagozatban és a középiskolában a becsületesebbeknél ez még csak fokozódik, ugyanis azt hiszik, bennük van a hiba. A másik rész, és ők vannak többségben, hamar rájön, hogy 30 gyerekből úgysem lehet 27-et megbuktatni, ezért épp csak annyit tanul, amennyit muszáj. Innen is adódik a sok másolás, hézagos történelem és irodalom tudás stb.

Urbán János említi a mohácsi csata, A walesi bárdok és a Hamlet tanításának fontosságát, mintha én ezeket el akarnám hagyni. "Álljunk meg azért! Ezt azért mégsem!" – írja. Ezzel kapcsolatban megjegyezném, hogy írásomban éppen a mohácsi vészről tanultak fontosságát emeltem ki. Továbbá én a túlzott, és a gyerekek életkori sajátosságait meghaladó, és ezért is felesleges anyag tanítását bírálom.

Kérdem én: hány verset írt Arany János és hány drámát a Hamlet írója, és ebből mennyit tanítunk? Csak annyit, amennyi szükséges ahhoz, hogy többi művük iránt is felkeltsük az érdeklődésüket. Úgy érzem, az általam javasolt matematika tanterv is ilyen szellemű. A "morzsák" tanításával kapcsolatban az a véleményem, hogy ez a lehető legrosszabb, mert jó néhány anyagrésszel mindössze két-három órát foglalkozunk. Ismétlésre nincs mód, így semmi sem marad belőle, csak feleslegesen elment velük az idő, ami ugye – sok kicsi sokra megy – a végelszámoláskor igen tetemes. Például az általános iskolában számtani és mértani sorozat, vagy a gimnázium első osztályában harmonikus és négyzetes közép.

Sajnos fenn kell tartanom azt a véleményemet is, hogy a tananyag változása a "pillanatnyi fejesek ízlését követi". Ez jól nyomon követhető, ha megvizsgáljuk az elmúlt évtizedek tanterveit és tankönyveit. Nem akarok ismétlésbe bocsátkozni, csak utána kell nézni az általam felsorolt példáknak.

A Szigetszentmiklósi Pedagógus Kamara május 20-i ülésén ezzel a témával is foglalkozott. Kiemelném egy alsótagozatos kartársnő véleményét, aki szerint már az első osztályosok is erősen túlterheltek, valamint egy biológia-földrajz szakos tanárét, aki szerint az ő tárgyainál is ugyanaz a helyzet, mint a matematikánál. A jelenlévők véleménye megegyezett abban, hogy igencsak hiányzik a tanulók iránti szeretet.

Ezzel kapcsolatban megjegyzem, hogy nagyon egyetértek Urbán Jánosnak azzal a gondolatával "hogy a tanuló érezze jól magát az órán". Ezt szeretném én is, mert most ennek épp az ellenkezőjét tapasztaljuk. Ezért írtam a dolgozatomat, és konkrét megoldást is igyekeztem kínálni hozzá. Mind a Szerkesztő, mind Urbán János bírálja ezt a megoldást, de mást nem kínál helyette.

Szigetszentmiklós, 1992. május 21.

VERES LÁSZLÓ

Veres László cikkéhez

Bevezetésként néhány szót kell szólnom arról, hogy mi indított cikkírásra. Középiskolai éveimben igen magas színvonalú matematika oktatásban részesültem: speciális matematika tagozaton végeztem. Ez az időszak jelentette a matematikával kötött barátságom kezdetét. Ekkor még elképzelni sem tudtam, hogy valakinek komoly gondjai lehetnek e tárggyal. Később matematikatanár lettem, olyan iskolában, olyan osztályokban tanítottam, ahol a diákoknak sokat kellett küszködni e tárggyal. Bennem is sokszor fölmerült a kérdés: hogyan lehetne segíteni ezen a tarthatatlan állapoton, javítani a hatásfokon. Hogyan tudnék még többet tenni hogy a diákok ne félve üljenek be az órára, de mégis megtanítsam nekik azt, amit előírtak? Természetesen az a gondolat is megfogalmazódott bennem, hogy az anyag jelentős részét jobb lenne kihagyni. A nehezebben tárgyalható, szükségtelennek tűnő részeken egyszerűen átugrani és soha vissza nem térni rájuk. Most már úgy érzem, hogy az ilyen módon történő könnyítés csak a legkisebb ellenállás irányába való elmozdulás, semmi más. Ez a legkényelmesebb megoldás a tanár és a diák számára egyaránt. A kérdés az hogy hasznos lenne-e ez?

Közvetlen összefüggések

A matematika Urbán János szavaival: "az emberiség közös kultúrájának több ezer éven át kialakult és állandóan megújuló közös kincse". (Iskolakultúra, 1992/10. sz. p. 51.) Ahhoz azonban nincsen jogunk, hogy a diákoktól, a leendő felnőttektől; tudósoktól, orvosoktól, esztergályosoktól, háziasszonyoktól megtagadjuk e kultúra megismerésének és elmélyítésének lehetőségét.

A Veres László által felvetett problémát úgy lehetne helyesebben megközelíteni, ha a kérdést így tennénk fel: hogyan tanítsuk meg jobban a matematikát? Ebbe az is belefér, hogy egyes, egyértelműen szükségtelennek minősített részeket kihagyjunk, máshogy tanítsunk, esetleg korábban szükségtelennek ítélt fejezeteket, amelyekről utóbb kiderült, hogy mégsem azok visszavegyünk. A "szabás-varrás-toldozgatás" mégsem oldhat meg semmit.

Veres László cikkében kizárólag a matematikaoktatás közvetlen hatásairól beszél, kifelejtve-kihagyva a közvetett hatásokat (erről majd később). Megemlíti, hogy fia nagyon keveset használ abból az anyagból, amit az iskolában tanult. Kérdés persze, hogy mennyire van ez így? Nem lehetséges-e, hogy csak nincs tisztában azzal, hogy felhasználja? Vagy nem lehetséges-e, hogy nem tanították meg arra, hogyan használja? Vagy más munkakörben – amelyre diplomája jogosítja – használ(hat)ná esetleg?

Egyik ismerősöm (műszaki főiskolát végzett, most gyárigazgatóként dolgozik) a minap tette föl a kérdést, hogy miért volt szükséges megtanulnia a differenciálást és az integrálást, ha ezeket sosem alkalmazza. Nem emlékszem pontosan, de valamilyen sablonválaszt adtam. A feleletet azonban maga adta meg, amikor néhány héttel később újra találkoztunk. Egyik volt főiskolai csoporttársával beszélgetett, aki kutató-fejlesztő intézetben dolgozik. Neki is föltette a kérdést, és a következő választ kapta: közvetve sokszor, közvetlenül ritkábban, de mindenképpen gyakran alkalmazza a differenciálást, integrálást. Sőt ezek ismeretének hiányában nem értene, nem érthetne sok fontos szabályt, törvényt. Azt hiszem, nem törekedhetünk arra, hogy igazgatókat vagy kutató-fejlesztő mérnököket, külkereskedőket vagy menedzsereket képezzünk. Nincs annyi iskolatípusra lehetőség, ahány munkakör van. Nem is helyes egy-egy túlságosan speciális szakterületre kiképezni embereket. Az oktatás – nem csak a felsőfokú tanítási intézmények, hanem a középfokúak is, és méginkább az alapfokúak – csak alaptudást adhatnak, amit a diákok később felnőtt, dolgozóként szakterületeik igényeinek megfelelően fejleszthetnek (vagy hanyagolhatnak el).

Mi hát a megoldás?

Változtatni kell! Ami semmiképpen sem könnyű! Például úgy, hogy rámutatunk a matematikai összefüggések alkalmazhatóságára. A tanároknak ez a mostaninál sokkal keményebb követelményeket állít: a diákokat matematika órákon ne csak arra tanítsák meg, ami közvetlenül a tananyag, hanem arra is, hogy melyik fejezet milyen gyakorlati alkalmazást von maga után.

A matematika minden fejezete – az is amit jelenleg tanítunk és az is amit nem – egy-egy gyakorlatban fölmerült probléma megoldására jött létre. Az is a tanár, a tantárgy és a tankönyv feladata, hogy a szigorúan vett matematikai tananyagon túl, mutasson diákokhoz közel álló alkalmazásokat. Így lehet és kell segíteni. Hiába hagyjuk ki ugyanis a matematika tananyag jelentős részét, ez csak újabb problémát szül és az eddigit sem oldja meg. Újabb gondokat okozhat az, hogy nem figyelünk azokra, akik később alkalmazni szeretnék a kimaradt részeket továbbá semmi sem biztosítja, hogy a maradék valóban használható lesz sokak számára.

Közvetett összefüggések

Az emberi gondolkodás alapja az, hogy képesek vagyunk absztrakcióra. Ha nem tudnánk elvonatkoztatni, elhanyagolni bizonyos dolgokat, másokat meg kiemelni, képtelenek lennénk sok – egyébként könnyedén megoldható – probléma kezelésére. Ha az üzletben vásárolva a tíz forint meg a húsz forint összeadásából a forintra figyelünk, akkor képtelenek leszünk tíz kilogrammot összeadni húsz kilogrammal. Ha a téglalap alakú kert területének kiszámításakor nem vagyunk tisztában a téglalap fogalmával, csak a kerttel, akkor nem fogjuk tudni kiszámítani pl. egy téglalap alakú fal felületét. A matematika feladata nemcsak a gyakorlati, a közvetlen alkalmazás, hanem az is, hogy megtanítson az absztrakt gondolkodásra. Ez természetesen néhányak tanári szokásainak, tanítási módszerének megváltoztatását jelenti. Ez sem a legkisebb ellenállás irányába mutat, mint ahogy az előző javaslat sem. A befektetett munka viszont kamatostul megtérül.

Tanári-emberi tényezők

Egyetértek azzal a véleménnyel, hogy vannak maximalista és vannak liberális tanárok. De lehet folytatni tovább: vannak önmagukkal szemben minimalisták is, akik teljes igénytelenséggel adnak elő. Vannak semmivel sem törődők, akiket csak az érdekel, hogy az órát megtartsák és az már nem, hogy a diák megértette-e az anyagot vagy nem.

Röviden – a diákok nyelvén mondva – vannak jó tanárok és vannak rosszak. Sőt vannak olyanok is, akik egyik osztályban tudnak "jó fejek" lenni, másikban nem. Az egyik osztállyal megtalálják a hangot, a másikkal nem. Azt hiszem erre a problémára addig nem fogunk megnyugtató megoldást találni, ameddig a pedagógusok megbecsültsége olyan, amilyen. Ameddig a tanárszakokra felvételizők alkalmasságát nem vizsgálják. Ameddig az egyetemeken szinte kizárólag szaktárgyi képzésben részesülnek a hallgatók. A pedagógiai tantárgyak pedig (finoman szólva) nevetségesek a későbbi gyakorlati szükségszerűség szempontjából.

Vígasztaló, bár semmiképpen sem megnyugtató, hogy más munkaköröknél is hasonló gondok jelentkeznek. Minden munkakörben vannak jó és rossz beosztottak és főnökök. Más szakokon is, nemcsak a tanárokat képzőkön, vannak az oktatásban lefedetlen területek. Más egyetemek és főiskolák tananyaga sem mentes "fehér foltoktól". És nemcsak a pedagógusi pálya nincs megbecsülve.

Megoldás? Megoldás!

A felmerült problémákra az előbbiekben felvázolt megoldás – az emberi, tanári tényezőkön túl – hatalmas időt igényel. A mostani óraszám helyett másfélszer annyira lenne szükség. Ez pedig az amúgy is nagyfokú túlterheltség miatt kivitelezhetetlen.

Van más lehetőség is arra, hogy több idő jusson minderre, a diákok további leterhelése nélkül. Csak össze kell vetni a középiskolai és az általános iskolai tankönyvek tartalmát és minden világos lesz. A két szinten teljesen eltérő szóhasználattal rengeteg átfedést fedezhetünk fel. Az általános iskolai anyag nagy részének újratanításával telik el a középiskola szinte teljes első éve. Ha olyan tanterv és tankönyvsorozat születhetne, amely a felesleges újratanulásokat, átfogalmazásokat kiküszöböli, sok idő szabadulhatna föl. Ezeket az időket lehetne felhasználni a tanítás leírt bővítésére.

Nemcsak időben, hanem térben is lehetne növelni a tantárgy keresztmetszetét azzal, ha a fizika, a kémia, a technika tantárgyakkal párhuzamosan tárgyalnánk egyes fejezeteket. Az ilyen kapcsolat használna a matematikának: példaanyagot tudna adni a többi tantárgy, de azoknak is: nem kellene újra elmagyarázni egyéb órán egyes matematikai összefüggéseket, amelyek feledésbe merültek az idők folyamán.

ICHNÁD SÁNDOR

Talpáról a fejére vagy fejéről a talpára

Eredetileg csak *Fitos László* cikkére (1) akartam reagálni, de végül úgy éreztem, egy gyakori jelenséget kicsit általánosítva fogok bemutatni. Sokszor előfordul, hogy olyan eljárásokat tanítunk a gyerekeknek, amelyek nagyon hatékonyak, de az igazi matematikai lényegük túl bonyolult ahhoz, hogy könnyen elintézzük. Ilyenkor hajlamosak vagyunk "csúsztatni", azaz úgy tenni, mintha a probléma nem is létezne, és a kijelentésünket "magától értetődőnek" tekinteni. Ezeket összegyűjteni, és részletesen elemezni sokkal nagyobb vállalkozás, mint amit egy ilyen cikk célul tűzhet ki.

Jó volna ha ez az írás egy sorozat nyitánya lehetne, amelynek minden egyes tagja egy-egy ilyen, az iskolai matematikában nem tisztázott részletet mutatna meg más szemszögből.

Ezúttal a logaritmusfüggvény és annak konkavitása (konvexitása, ha az alap egynél kisebb) lesz a témánk. *Fitos László* cikkében egy, a matematikai okoskodásokban jól ismert, technikát mutat be nevezetes egyenlőtlenségek bizonyítására. Ez a következőn alapul: Egy f: [a,b] R függvényt Jensen konvexnek (konkávnak) nevezünk, ha bármilyen $x_i \in (a,b)$ valós számokra, teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \leq (\geq) \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

A szerző ezt használja föl a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség bizonyítására, kiindulva abból, hogy az $x \to \lg x$ függvény pozitív x értékekre *konkáv*. A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség pedig az $x \to x^2$ függvény konvexitásából következik. A harmonikus közép "helye" már ezekből adódik, végül a négyzetgyökös közepet az $x \to \sqrt{x}$ függvény konkavitásának felhasználásával illeszti be a számtani közép alá, a lg függvény felhasználásával pedig a mértani közép fölé. Így a felsorolt közepek közötti egyenlőtlenség-lánc a következő alakú: H≤M≤Ngy≤–Sz≤N, amely tetszőleges n db pozitív valós szám esetén érvényes.

Ebben a cikkben éppen *fordított* utat követünk. Az egyenlőtlenségeket *elemi úton* bizonyítjuk, s éppen ezeket használjuk fel arra, hogy megmutathassuk például az lg függvény konkavitását. Ez a tény ugyanis *nem* magától értetődő. Bizonyítani lehet természetesen az analízis súlyos eszközeivel, ez azonban többnyire – talán a speciális matematikai osztályok kivételével – meghaladja a középiskolai kereteket. Nem elegendő a differenciálhányados ismerete, itt a második derivált és a konvexitás viszonyának ismerete kell, ez pedig legfeljebb egy egyetemi analízis kurzustól kívánható meg. Egy másik észrevétel: a konvexitás fogalma nem szorítkozik a differenciálható függvények körére (lásd pl. $x \to |x|$). Ha egy függvény nem differenciálható, akkor a konvexitási kérdések eldöntésére más eszközöket kell használni. Természetesen ez a fent említett függvényekre nem áll, ezeknek a deriváltjait minden valamire való analízis kurzuson le szokták vezetni. Hangsúlyozom, hogy ilyen háttér nélkül viszont csak *hittétel* az $x \to \lg x$ függvény konkavitása. (Az $x \to x^2$, illetve az $x \to \sqrt{x}$ függvények esetén egyszerűbb a helyzet, mivel a parabola konvexitását más módon is meg lehet mutatni, ámbár a velük bizonyított egyenlőtlenségeket is könnyebb lesz elemi úton belátni.)

Ráadásul az exponenciális- és a logaritmusfüggvény fogalmilag is igen bonyolult, gondoljunk pl. az irracionális kitevőjű hatványok értelmezésére. A logaritmusfüggvényről némileg merésznek tűnik "csak úgy" azt mondani, hogy konkáv, ha az alap egynél nagyobb.

Didaktikailag éppen az lenne indokolt, hogy belássuk: helyes az, ahogyan vázolni szoktuk a logaritmusfüggvényt.

A dolgozat második fejezetében egyet leírok a lehetséges bizonyítások közül a számtani és a mértani közép közötti kapcsolat megállapítására, míg a többire csak utalok (lehetőség szerint az irodalom megadásával). A harmadik részben a logaritmus fogalmával foglalkozom. Ez egy *Deák Ervin* által írt tankönyvben (2) is megtalálható, a részletes konstrukció bemutatásával, előnyeinek ismertetésével, valamint készült egy videófilm is erről a témáról az ELTE Oktatástechnika Tanszékén (3); így itt ezekből csak egy-két ideillő alapgondolatot emelek ki. A negyedik részben megmutatom, hogy a második fejezetben bizonyított egyenlőtlenségből hogyan következik az x lgx függvény konkavitása. S ezzel pontosan megfordítottam az (1)-ben leírt gondolatmenetet. Az ötödik, utolsó fejezetben foglalom össze, miért érzem ezt az utat *módszertanilag* sokkal szerencsésebbnek.

A számtani és a mértani közép közötti kapcsolat

Először határozzuk meg, mit értünk adott pozitív számok számtani illetve mértani közepén! Az egyik az összeadással kapcsolatos, és egyszerű átlagnak is mondják: az $x_1, x_2, \ldots x_n$ számok számtani közepe:

$$Sz := \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

Szokás (az aritmetikai szó kezdőbetűje után) A-val is jelölni, illetve ha fontos a számok megnevezése, akkor $A(x_1, x_2, \ldots x_n)$-t írunk.

A másik a szorzással van kapcsolatban, és mértani illetve geometriai középnek nevezzük az adott n darab szám szorzatából vont n-edik gyököt, formálisan:

$$M := \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

Szokás (a geometriai szó kezdőbetűje után) G-vel jelölni, ha pedig magukat a tényezőket is fel akarjuk tüntetni, akkor $G(x_1, x_2, \ldots x_n)$-t írunk.

A két közép közötti kapcsolatot vizsgáljuk meg, azonban nem ebben a formában, hanem egy kicsit átfogalmazzuk. Pólya György egy gondolatmenetének általánosításával azt fogjuk bizonyítani (4), hogy ha n pozitív szám összege adott, akkor a szorzat maximuma az n egyenlő szám esetében következik be. Ez ekvivalens a $G \leq A$ egyenlőtlenséggel, amelyet bizonyítani szeretnénk.

Természetesen ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, akkor $G = A = x$. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha nem mind egyenlők a számok, akkor véges sok lépésben – miközben a szorzat állandóan növekszik – eljuthatunk egy olyan szám-n-eshez, melynek összege ugyanannyi, mint az eredetié, de a számok mind egyenlők. Ha ezt megtesszük, akkor elintéztük a problémát.

Legyenek tehát adottak az $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ pozitív valós számok. Az összegük legyen S, amely egyenlő nA-val. A szorzat értéke legyen P_0. Először megnézzük, hogy nem egyenlők-e a számok; ha nem, akkor

$$x_1 < A, \text{ és } x_n > A. \qquad (*)$$

Legyen $x_1^{(1)}=A$, $x_n^{(1)}=x_n-A+x_1$, míg $x_i^{(1)}=x_i$ ha $i \neq 1$ vagy $i \neq n$. Ekkor az összeg változatlan, a szorzat azonban nőtt; n-2 tényező ugyanis változatlan, míg az első és utolsó szorzata megnőtt, hiszen:

$$x_1^{(1)} \cdot x_n^{(1)} = A\,(x_n-A+x_1) = A \cdot x_n - A^2 + A\,x_1 < x_1\,x_n, \text{ mert}$$

$$A\,x_n - A^2 + A\,x_1 - x_1\,x_n = A(x_n-A)+x_1\,(A-x_n) = (x_n-A)\,(A-x_1) > 0 \qquad (*) \text{ miatt.}$$

Ezzel beláttuk, hogy az új szám-n-es P1-gyel jelölt szorzata nagyobb, mint a kiindulóé volt, ha a számok nem mind voltak egyenlők. Ha a számok nem mind egyenlők, akkor a legkisebb szám < A, míg a legnagyobb szám > A. Ismét nagyság szerint rendezve az eljárás megismételhető. Ezzel a szorzat tovább nő, s most már legalább két szám egyenlő A-val. Világos, hogy legfeljebb n lépésben eljutunk a mind egyenlőhöz, bármilyen szám n-esből is indultunk. (Valójában a legrosszabb esetben is h-1 lépés elegendő.) Minden lépésben növeltük a szorzatot, tehát ha végül $P_n=A^n$, akkor $P_o \leq P_n$ miatt, felhasználva az n. hatvány monotonitását

$$\sqrt[n]{P_0} \leq \sqrt[n]{P_n} = A$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást, és közben sehol nem használtunk elemit meghaladó módszereket (azaz "finit módon", a határérték fogalma nélkül okoskodtunk). Tehát G A. Ez a bizonyítás elolvasható magyar nyelven Kazarinoff remek könyvecskéjében (5).

Pólyánál találunk más bizonyítást is, de az felhasználja a limesz fogalmat, s így céljainknak nem felel most meg (6). Egy másik, hasonlóan elemi, szép bizonyítás található (7)-ben is.

Megjegyzem még, hogy a harmonikus közép, illetve a négyzetes közép elhelyezése az egyenlőtlenségláncba szintén elemi úton megy, az előbbit lásd (5)-ben a 193-194., vagy (7)-ben a 18-19. oldalon, illetve a másodikat pl. (7)-ben a 30-32. oldalon. A gyökös közép elhelyezkedése is kiolvasható (7)-ből, ahol egy komplett bizonyítás található arra, hogy az általánosított hatványközepek monoton nőnek, tehát ha < ß, akkor h < hß, ahol h definíciója:

$$h_\alpha = \left\{\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right\}^{1/\alpha} \qquad (\alpha \neq 0)$$

(Ha $\alpha=0$, akkor vagy határátmenettel, vagy definíció szerint a geometriai közép adódik).

Esetünkben azonban van egyszerűbb bizonyítás is, mint (7)-ben. Jelöljük Ngy-vel a négyzetgyökös közepet. Állításunk: G ≤Ngy≤ A,

vagyis

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \left\{\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{n}\right\}^2 \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

A baloldal bizonyítása egyszerű, csak a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget kell felírni a $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\ldots\sqrt{x_n}$ pozitív számokra. A jobb oldali egyenlőtlenség sem túl bonyolult. Ha elvégezzük a négyzetre emelést, a nevezővel átszorozva adódik:

$$\sum_{i=1}^n x_i + 2\sum_{i\neq j}^n \sqrt{x_ix_j} \leq n\sum_{i=1}^n x_i$$

tehát elég belátni, hogy

$$0 \leq (n-1)\sum_{i=1}^n x_i - 2\sum_{i\neq j}^n \sqrt{x_ix_j}$$

ahol a jobb oldal egyenlő $\sum_{i\neq j}^n(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j})^2$-nel, ami – minthogy négyzetszámok összege – biztosan nem negatív.

Tehát az (1)-ben szereplő összes egyenlőtlenséget *elemi úton* bizonyítottuk.

A logaritmus fogalma az n-jegyű logaritmus alapján

Ebben a fejezetben csak röviden vázoljuk, hogyan lehetséges a logaritmust az általánosított (tehát nem pozitív egész kitevős) hatványozás használata nélkül felépíteni. Alapfogalom egy x szám a-nagyságrendje: $n_a(x) = k \Leftrightarrow a^k \leq x < a^{k+1}$. Ez minden számhoz hozzárendel egy pozitív egészet, de természetesen messze nem egy-egyértelműen. Értelmeznünk kell azt is, mit akarunk számnak nevezni. Legyen szám a végtelen tizedestörtek halmazának egy eleme (ami valójában egy lehetséges modellje a valós számoknak). A fenti fogalmat lehet finomítani azzal, hogy nem csak a szám nagyságrendjét, hanem a 10. hatványának a nagyságrendjét is figyelembe vesszük. Ezzel finomabb hozzárendelést valósítunk meg, minden számhoz egy darab, egy hosszúságú tizedestörtet adunk meg a következőképpen:

$n_a(x^{10})/10$ legyen a hozzárendelés módja. Nevezzük ezt az x szám a-alapú egyjegyű logaritmusának. (n hosszúságúnak akkor nevezünk egy véges tizedestörtet, ha a tizedesvessző után éppen n jegy van. A végén levő egy vagy több 0-át is figyelembe vesszük!)

Hasonlóképpen az n-jegyű logaritmus legyen:

n-$\log_a x := n_a(x^{10^n})/10^n$.

Ez a fogalom analóg az iskolában is használt logaritmus táblázatok számaihoz, ahol szintén csak néhány jegyre megadott logaritmus értéket lehet találni, nem teljesen azonos azzal, mert a táblázatokban az utolsó jegy nem értékes jegy, hanem kerekített. Van azonban egy lényeges különbség aközött, hogy egy "létezőnek" tekintett végtelen tizedestört egy véges szeletét írjuk le egy táblázatba, vagy pedig éppen ezt a végtelen tizedestörtet szeretnénk fölépíteni olyan elemekből – az n-jegyű logaritmusokból –, amelyeknek határozott, elemi számtani jelentésük van.

"Tökéletes logaritmustáblázat" – azaz egy olyan F hozzárendelés, amely minden pozitív számhoz (akár csak racionálisokhoz) egy véges tizedestörtet rendel úgy, hogy $F(x\,y) = F(x)+F(y)$ – nem is létezik. (Legyen F egy egyjegyű hozzárendelés, és $(a,b)=1$. Ha például $F(a) = 3{,}8$; $F(b) = 4{,}7$, akkor $F(a^{47}) = 47\cdot 3{,}8 = 38\cdot 4{,}7 = F(b^{38})$ lenne, ami azonban ellemntmond az egy-egyértelműségnek, hiszen $a^{47} \neq b^{38}$.)

Az x szám a alapú logaritmusa legyen egy olyan *végtelen* tizedestört, amelynek az első n hosszúságú szeletét éppen az n-$\log_a x$ adja. Ez egy absztrakt definíció, nem részletezem, hogyan lehet ezt motiválni, s miért látszik didaktikailag legalábbis egy alternatívának ez az út, lásd (3). Ahhoz, hogy ez egy értelmes definíció legyen, azt kell belátni, hogy (n+1)-$\log_a x$ az n-$\log_a x$ folytatása egy további tizedesjeggyel. Ennek ellenőrzését az olvasóra bízzuk. Ezen kívül a monotonitásra lesz szükségünk, valamint annak a fontos tulajdonságnak a meglétére, amiért éppen ezt a függvényt építjük fel, nevezetesen, hogy az alapazonosság: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ igaz. A monotonitáshoz elég annyit tudni,hogy a végtelen tizedestörtek rendezése lexikografikus rendezés. Ezen túlmenően a szigorú monotonitás is igaz (amit el is várunk!) az alábbiak miatt:

ha $0<x<y$, akkor létezik olyan n, amelyre $y^{10n} - x^{10n} > 10\,x^{10n}$, mert ha $y = x+c$, akkor $(x+c)^{10n} > x^{10n} + 10^n x^{10^n-1} c$, s így elég belátni, hogy $10^n x^{10n-1} c > 10\,x^{10n}$, vagyis $10^{n-1} c > x$, ez pedig, mivel x és c fix pozitív számok, az arkhimédesi tulajdonság miatt teljesülni fog. Így a $\log_a y$ n-ik tizedesjegye legalább eggyel nagyobb, mint $\log_a x$-é.

Az additivitásról egy fontos didaktikai szempont miatt egy pár szót. Sosem szoktunk beszélni arról, hogyan lehet egyáltalán értelmesen definiálni végtelen tizedestörtek összegét, vagy azok szorzatát. Így aztán azok az állítások, hogy a valós számok testet alkotnak a két alapműveletre nézve, teljesen a levegőben lógnak. Az világos, hogy mivel fogalmilag nagyon összetett dologról van szó, ezt nem könnyű az iskolában tisztázni, de szó nélkül elmenni mellette egyike a bevezetőben említett didaktikai hibáknak, amelyek számosan fellelhetők az iskolai matematikában. Az $\log_a(x\,y) - \log_a x + \log_a y$ egyenlőség tehát más *jelentésű*, hiszen ehhez először a $\cdot$ és + műveletek jelentését kell tudni, ha nem szokásos racionális számokról, hanem végtelen tizedestörtekről van szó. Most csak annyit mutatunk meg, hogy ha minden $n > 0$ esetén $|\,n\text{-}\log_a(x\,y) - (n\text{-}\log_a x + n\text{-}\log_a y)\,| < 10^{-n+1}$, akkor az "egyenlőség" igaz, feltéve, hogy $\log_a x$ minden x-re olyan végtelen tizedestört, amelyben nem állhat végtelen sok 9-es egymás után. (Ez tényleg nem fordulhat elő, aminek bizonyítása – bármilyen egyszerű is – most nem fér ebbe a cikkbe.

A kívánt egyenlőtlenség azonban fennáll, hiszen:

$$| n_a([xy]^{10n})/10^n - [n_a(x^{10n})/10^n + n_a(y^{10n})/10^n \,|\, 10^n =$$
$$= | n_a([xy]^{10n}) - [n_a(x^{10n}) + n_a(y^{10n})] \,| = | j-(k+m) | \text{, ahol}$$
$$a^j \leq (xy)^{10n} < a^{j+1},\ a^k \leq x^{10n} < a^{k+1}, \text{ és } a^m \leq 1^{0n} < a^{m+1}.$$

Ekkor az utolsó két egyenlőtlenség szorzata: $a^{k+m} \leq (xy)^{10n} < a^{k+m+2}$, másrészt $a^j \leq (xy)^{10n} < a^{j+1}$, tehát $j = k+m$ vagy $j = k+m+1$, azaz $| j-(k+m) | < 10$ (ennél több is igaz, hiszen legfeljebb 1 lehet a differencia), s ez mutatja, hogy ha osztunk 10^n-nel, akkor a kívánt egyenlőtlenség adódik. Ebből a limesz fogalom segítségével már közvetlenül kapjuk, hogy a $\log_a(x\,y)$ és $\log_a x + \log_a y$ "valós számok" egyenlők, azonban ez a limesz fogalom nélkül is megy, "finit" értelmezéssel. Ez már egy következő cikk tárgya lenne (műveletek és azonosságaik a végtelen tizedestörtek körében). A témát illetően lásd (3) magyarázatait.

A logaritmusfüggvény konvexitása

Először tisztázzuk a konvex illetve konkáv függvény fogalmát. A konvexitásnak a geometriában is van jelentése, amely nem független a függvény konvexitás fogalmától. Egy ponthalmazt (a síkban vagy a térben) konvexnek nevezünk, ha bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja a halmazhoz tartozik. Ez a fogalom a függvény *grafikonja* segítségével vihető át függvényekre: Ha az $f:[a,b] \to R$ függvény grafikonja (amely a sík egy b-a szélességű sávjában van), valamint az $x=a$ és az $x=b$ egyenesek által határolt *felső* tartomány – tehát az $\{(x,y): a \leq x \leq b,\ y >= (x)\}$ halmaz – konvex, akkor mondjuk f-et konvexnek. Ez a szóhasználat szinkronban van a geometriával. A konkavitás esetében lényegében a grafikon *alatti* tartomány konvexitását jelenti. Szimbólikusan az $f:[a,b]\ R$ függvény *konkáv*, ha az $\{(x,y): a \leq x \leq b,\ y \geq f(x)\}$ halmaz *konvex* (szemléletesen ez a függvény görbe alatti *alsó* tartomány). Tehát egy függvény lehet konvex, konkáv vagy (a legtöbb esetben!) egyik sem. Amit itt leírtunk fogalmilag más, mint az első részben említett Jensen-konvexitás.

A függvények esetében szerencsés, ha nem a grafikon egy geometriai tulajdonsága alapján definiálunk egy fogalmat, hanem "geometriamentesen". Közismert, hogy ha f Jensen-konvex, akkor konvex is. Ha három számra írjuk fel a Jensen egyenlőtlenséget a konvex esetben úgy hogy x_1 és x_3 fix, míg x_2 tetszőleges köztük levő ($x_1 < x_2 < x_3$), akkor az egyenlőtlenségből éppen azt kapjuk, hogy a húr tetszőleges pontja a függvénygörbe felett van.

Ezekután megmutatjuk, hogy az előző fejezetben definiált logaritmusfüggvény egynél nagyobb alap esetén Jensen-konkáv, míg egynél kisebb alap esetében konvex. Ehhez elég belátni, $a>1$ esetén

$$\log_a\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \geq \frac{\log_a x_1+\log_a x_2+\ldots+\log_a x_n}{n} = \frac{\log_a\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)}{n}$$

míg $a<1$ esetén a fordított egyenlőtlenséget.

A jobb oldalon az alapazonosság szerint alakítottuk át a törtet. Mivel n egész szám $n \cdot \lambda og_a x = \log_a x^n$ ismét csak az alapazonosság miatt, azaz

$$n\log_a\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) = \log_a\left\{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right\}^n$$

Mivel $a>1$ esetén a logaritmus monoton növő, ezért

$$\log_a\left\{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right\}^n \geq \log_a(x_1x_2\ldots x_n),$$

miután korábban már beláttuk, hogy

$$\left\{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right\}^n \geq x_1x_2\ldots x_n$$

Mivel $a<1$ esetén a logaritmus monoton fogy éppen a kívánt fordított irányú egyenlőtlenséget kapjuk. Következésképpen, mivel a Jensen konvexitás következménye a "geometriai értelemben" vett, fent leírt konvexitás, ezért a szokásos logaritmus ábrázolásunk helyes. Ennek belátását tűztük célul.

Összefoglalás, néhány didaktikai alapelv

Megállapíthatjuk tehát, hogy míg a különböző közepek közötti egyenlőtlenségek bizonyítása teljesen elemi, túl bonyolult fogalmi apparátust nem igényel, addíg mind a konvexitás, mind a logaritmus fogalma igen gazdag tartalmú, és lényegesen bonyolultabb. Így az (1)-ben vázolt út didaktikailag egyáltalán nem indokolt. Nem szükséges egy egyszerű tényt, igen összetett, és nehéz fogalmak felhasználásával bizonyítani, arról nem beszélve, hogy – amint azt igyekeztem megmutatni – ezek a fogalmak az iskolában nem is tisztázódnak, s az igazi jelentésüket a tanulók többnyire nem ismerik. Ez tovább növeli az ellenérzést az (1)-ben vázolt úttal szemben. Természetesen az itt csak vázolt fordított út, nagyon is meggondolandó lehet, hiszen általában a konvexitási kérdések "ex catedra" kijelentések maradnak az iskolában, s legfeljebb később az analízis eszközeivel nyernek igazolást, ha ez nem marad el.

Mint talán érzékelhető ebből a rövidre fogott elemzésből, alapvetően fontosnak találom, hogy az iskolában maga a matematika is épüljön, ne csak kész bonyolult tények együttese legyen, amik jól fölhasználhatók bonyolult feladatok megoldásában. A mai középiskolai matematikaoktatásra többnyire az jellemző, hogy az "anyagot" igyekszünk minél gyorsabban, minél precízebben átadni, s a gyerekektől a felhasználást várjuk el különböző, a témához tartozó feladat megoldásával. Azok között a Magyarországon fellelhető irányzatok között, amelyek a kreativitásra, a felfedezések élményére sokat építenek, igen szellemes feladatsorok segítségével igyekeznek megkönnyíteni a bonyolultabb fogalmak megértését; van olyan, amelyik a valós számok és az azokkal történő műveletek genetikus fölépítésére törekszik. Mások munkásságából ez eddig hiányzik, mivel ezek olyan hosszútávú fejlesztést igényelnek, amire a mai tematikusan, lineárisan fölépített és zsúfolt tanterv látszólag nem ad módot. Ez csak látszólagos ellentmondás, amelyet az iskolai matematika belső strukturális átalakításával el lehet kerülni. Az a szemlélet, hogy a feladatmegoldó tevékenység tervezésekor a matematikai fogalmak fejlesztését és felépítését is figyelembe vegyük, szinte teljes mértékben hiányzik az oktatásból. Ez a probléma szorosan összefügg más általános tanítási nehézséggel, így a tanulói aktivitás alacsony szintjével, a gyakorlati problémák matematizálási lehetőségeinek majdnem teljes hiányával, az egyéni tempó figyelmen kívül hagyásával. Ez a tanulók matematika iránti alacsony érdeklődésében jelentkezik, amivel együtt jár, hogy nincsenek tisztában a matematika igazi arcával, ami az iskolában sokszor egészen hamisan jelenik meg. A középiskolai matematikaoktatás egyik lehetséges vezérfonala lehetne a *valós számok* igénye (itt elsősorban a végtelen tizedestört modellre gondolok), amely éveken át végighúzodhatna az oktatás egészén. Milyen problémák indokolják a megkonstruálásukat, s hogyan lehet ezt végigvinni. Nem úgy, egyetlen óra alatt, ahogyan ma történik a négyzetgyök fogalmának bevezetésekor. Tudomásul kellene venni, hogy nem a valós számok ismeretével jövünk a világra, s hogy egy igen gazdag tartalmú, nagyon bonyolult fogalomról van szó, amelyen, mint a jó "állatorvosi lovon" a matematikai gondolkodás nagyon sok alapvető sajátossága megmutatható.

JEGYZET

(1) Fitos László: *A pozitív számok középértékei.* Iskolakultúra II. 1992/10. szám
(2) Deák Ervin: *Matematika II.* Műszaki Szakközépiskolák részére (kísérleti tankönyv), Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
(3) Deák Ervin – Vancsó Ödön: *A logaritmus, egy út a valós számokhoz.* Videofilm, készült 1991-ben az ELTE TTK Oktatástechnika Stúdiójában
(4) Pólya György: *Indukció és Analógia.* 25. feladat 156.-157. oldal, Gondolat, Budapest, 1988.
(5) N. D. Kazarinoff: *Geometriai egyenlőtlenségek,* 32.-36. oldal, Gondolat, 1980.
(6) Pólya György: Indukció *és Analógia,* 24. feladat 155. oldal, Gondolat, Budapest, 1988.
(7) P. P. Korovkin: *Egyenlőtlenségek,* 12.-17.oldal, Szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

VANCSÓ ÖDÖN

Helyreigazítás

Fitos László cikkéhez

Az 59. oldal 10. sorában:
"az a feltétel szerint" helyesen: "az a < b < c feltétel szerint"

Az 59. oldal közepén

$$\lg \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \text{ helyett } \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$$

Az 59. oldalon alulról a 4. és 3. sor között kimaradt:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

A 60. oldal legvégén a kettőspont után kimaradt:

$$\frac{lg\sqrt{a}+lg\sqrt{b}}{2} \le lg\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2},$$

azaz

$$lg\sqrt{ab} \le lg\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$