A harmadik esetben a kivonandó 162 egyes. Ennek a kivonása az előbbiek alapján az alábbi lejegyzésből könnyen érthető.

$$\begin{array}{lllll}
9 & 6^{+20} & 3 & 1 : 27 = 3\ 5\ 6 \\
\underline{-6^{+2}} & \underline{(21)} & & \\
1 & 5 & 3^{+40} & \\
\underline{-1} & \underline{0^{+4}} & \underline{(35)} & \\
 & 1 & 8 & 1^{+50} \\
 & \underline{-1} & \underline{2^{+5}} & \underline{(42)} \\
 & & 1 & 9
\end{array}$$

Csak az ilyen lejegyzéssel való, kellő ideig tartó szemléltetéssel képesek a tanulók megérteni és könnyebben elsajátítani a szokásos algoritmust úgy, hogy nem szükséges leírniuk a kivonandókat.

Remélem, hogy lesznek olyan kollégák mind az alsó, mind a felső tagozaton, akik dolgozatomnak valamilyen hasznát veszik.

KÖVES LÁSZLÓ

Ötletes gráfok

Gráfon általában egy véges ponthalmazt (csúcsok) értünk, amelyeket szakaszok (élek) kötnek össze. Ebben a cikkben nem a gráfokkal, és tulajdonságaikkal foglalkozunk, hanem bizonyos típusú szöveges feladatok megoldására hasznosítjuk a műveletek sorrendjét ábrázoló gráf adta ötletet.

Képzeljünk el egy közlekedési hálózatot ábrázoló gráfot (egy vasúti térképet, ahol a csúcsokat a vasúti csomópontok, míg az éleket a különböző helységeket összekötő vasútszakaszok jelentik). Ez azzal a fontos tulajdonsággal rendelkezik, hogy valamely útján haladva, minden csúcsból el lehet jutni minden csúcsba. Az ilyen gráfot *összefüggőnek* nevezünk. Az összefüggő gráfok között sajátos helyet foglalnak el az úgynevezett *„fák"*. Példaként adjuk meg a következő kifejezést helyettesítő gráfot:

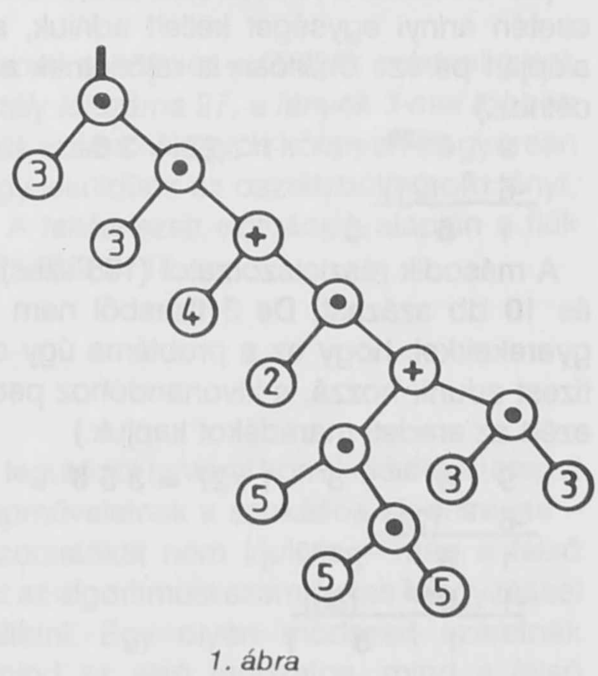
$3^2.[4+2.(5^3+3^2)]=K$

A kifejezés értékének a kiszámítása esetén, alulról kell indulni addig, amíg eljutunk a „fa" törzséhez.

Próbáljuk meg alkalmazni ezt az eljárást más hasonló kifejezés értékének a kiszámítása esetén is!

A gráffal való helyettesítés ötlete alkalmazható a következő típusú szöveges feladatok esetén is:

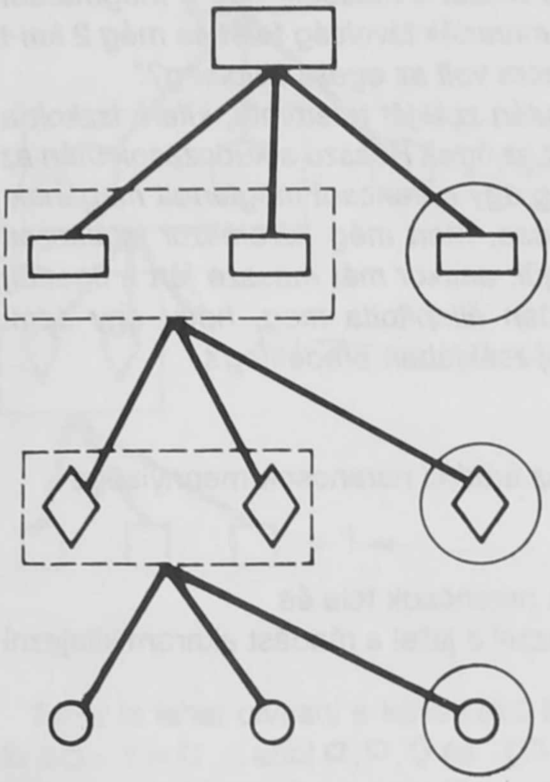
Egy anya néhány almát rakott az asztalra és azt mondta három fiának, hogy amikor hazajönnek az iskolából, osszák el egyenlően egymás közt azokat. Először István érkezett haza, elvette az almák egyharmadát és elment. Utána Péter jött meg, elvette az asztalon maradt almák egyharmadát és elment. Végül megérkezett János ő is, a megmaradt almák egyharmadát vette magá-



1. ábra

hoz. Számítsuk ki, hány almát hagyott az anya az asztalon, ha János 4 almát vett el!

Megoldás gráffal



az almák eredeti mennyisége

István három részre osztotta és az ő részét elvitte

Péter a maradékot osztotta három részre és ő is elvitte a részét

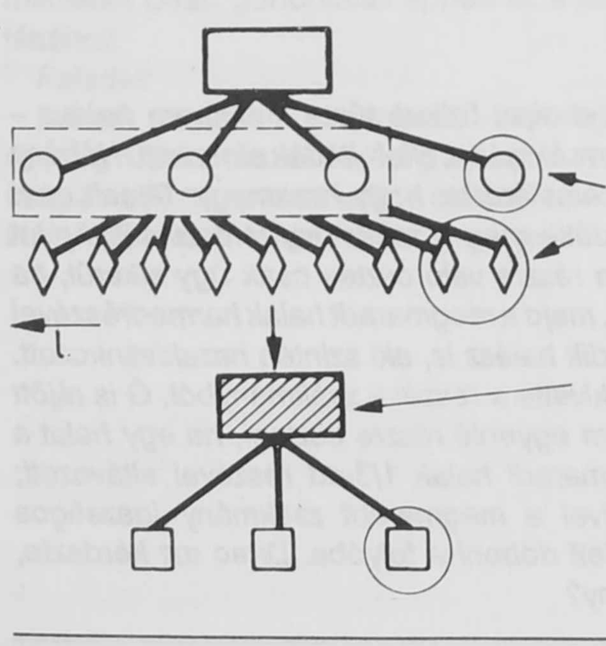
végül János is ugyanezt cselekedte

Tudom, hogy a „O" jelnek 4 alma felel meg, tehát a három összesen 12 alma, ami nem más mint a két „◊" jelnek megfelelő mennyiség egy ◊ = 6 alma, ezért három ◊ = 18 alma = két □ => egy □ = 9 alma és végül 3·□ = 27 alma volt eredetileg az asztalon.

Hasonló eljárást alkalmazva, oldjuk meg a következő feladatot: *Egy tanuló az első nap elkölti a pénzének felét, a második nap a maradék pénz egyharmadát, a harmadik nap megmaradt pénzének a felét, a negyedik nap pedig a maradék egyharmadát. Ezek után 12 leje maradt. Mennyi pénze volt eredetileg?*

Hasonló eljárás alkalmazható a következő, valamivel nehezebb feladatnál is: *Egy edényből kivesszük a tartalmának 1/4-ed részét, majd a maradék 2/9-ed részét és még 10 litert. Végül a maradék 1/3-ad részét vesszük el, így 40 liter marad az edényben. Hány liter folyadék volt benne?"*

Megoldás: a feladat gráfja a következő:



az eredeti folyadékmennyiség

kivesszük az 1/4-ed részét, majd a maradékot 9 részre osztjuk és két l részt és még 10 l-t kiveszünk; ezt nem tudjuk pontosan jelölni az ábrán, mivel nem tudjuk mennyi az értéke a jelnek. Ezért beiktatunk még egy segédlépést: kivesszük a 10 l-et és kapjuk a-■ jelölt mennyiséget, amelyet 3 részre osztunk és egyharmadát elvesszük.

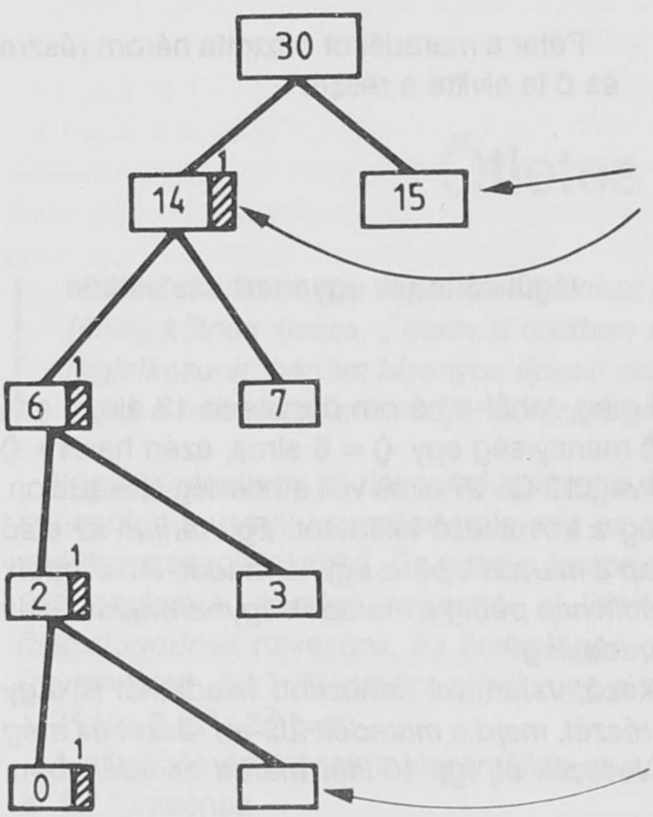
A maradék két □ = 40 l => egy □ = 20 l, vagyis a ■ = 60 l, ehhez hozzáadva a 10 l-t => a 7 darab ◊ összesen 70 l-t tesz ki, tehát a három ○= 90 l => egy ○= 30 l és végül az eredeti mennyiség 4x30 = 120 l volt.

Feladatok

A „Sas" csoport első nap az egész út 2/3- ad részét a második nap a megmaradt távolság 1/3-ad részét, a harmadik nap pedig a maradék távolság felét és még 2 km-t tett meg, a negyedik nap további 13 km-t. Mekkora volt az egész távolság?"

Egy lépéssel menjünk tovább! *Egy tolvaj, miután zsákját teletömte, kifelé iszkolt a narancsligetből. Szerencsétlenségére találkozott az őrrel. Hosszú alkudozások után az őr elengedte, de előbb a zsákmány felét és még egy narancsot megtartott magának. Szegény tolvajtól ugyancsak elpártolt a szerencse, mert még háromszor találkozott őrrel, aki ugyanazt a büntetést szabta ki rá. Végül, amikor már messze járt a ligettől, megnézte mennyi narancsa maradt és keserűen állapította meg, hogy egy sem. Határozzuk meg, hogy hány narancs volt a tolvaj zsákjában eredetileg?*

Megoldás:



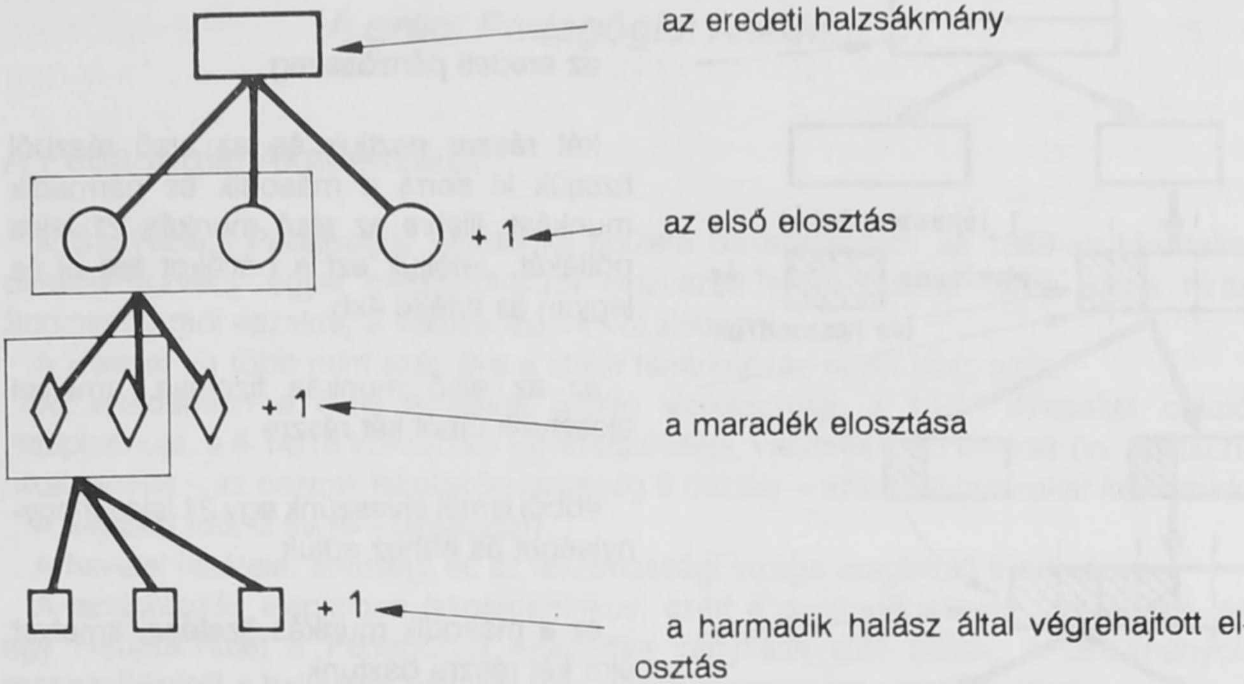
az eredeti narancsok mennyisége

a narancsok fele és
ezzel a jellel a ráadást akarom kifejezni

végül itt 1 narancs van, és visszaírva a részeredményeket, megkapjuk az eredeti 30 narancsot.

A következő feladatot *P. Dirac* angol Nobel-díjas fizikus tűzte ki: *Három halász – befejezvén a halászatot – nyugovóra tért, de a zsákmányt elfelejtették elosztani. Néhány órai alvás után az egyik halász felébredt, és elhatározta, hogy hazamegy. Társait nem akarta felzavarni álmukból, ezért egyedül oldotta meg a zsákmány felosztását.* Amint a halakat megszámolta, *rájött, hogy a három részre való osztás csak úgy sikerül, ha egy halat visszadob a folyóba. Ezt meg is tette, majd a megmaradt halak harmadrészével eltávozott. Rövid idő múlva felébredt a második halász is, aki szintén hazakívánkozott. Fogalma sem volt arról, hogy az első halász kivette a részét a zsákmányból. Ő is rájött arra, hogy a zsákmányt csak úgy lehet három egyenlő részre osztani, ha egy halat a folyóba dob. Miután ezt megtette, a visszamaradt halak 1/3-ad részével eltávozott; ugyanígy járt el a harmadik halász is, mivel a megmaradt zsákmány igazságos szétosztásához egy halat most is vissza kellett doboni a folyóba. Dirac azt kérdezte, hogy minimálisan hány halból állt a zsákmány?*

Megoldás:



Tehát le lehet olvasni a következő összefüggéseket: 3□+ 1 = 2◊; 3◊+ 1 = 2○ és 3○+ 1 = □ , ahol □, ○, ◊ és ▭ m és természetes számokat jelentenek. Ahhoz, hogy meghatározzuk a minimális mennyiségű halzsákmányt, elkészítjük a következő táblázatot:

próbálkozások			megjegyzés
□	◊	○	
0	1/2	–	nem jó
1	2	7/2	nem jó
2	7/2	–	nem jó
3	5	8	ez jó

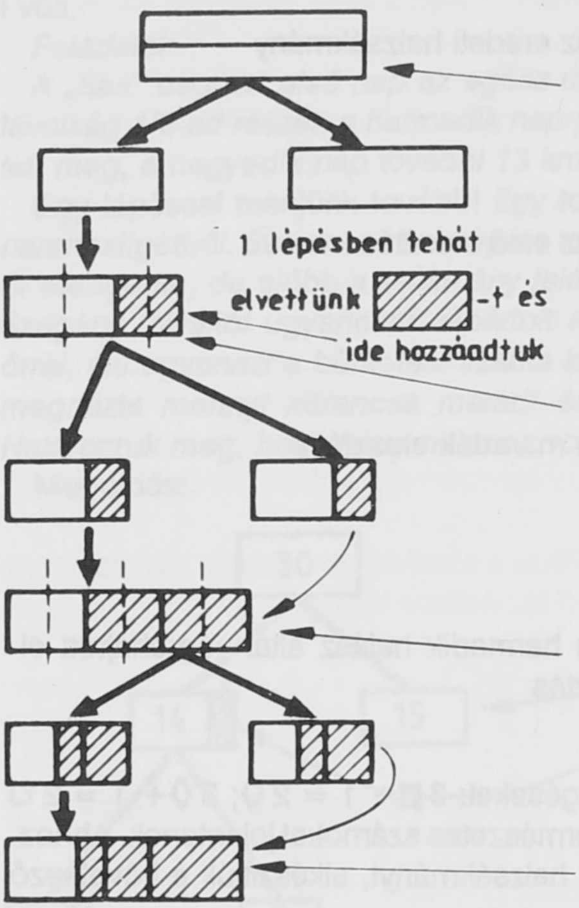
Tehát a zsákmány 8x3 + 1 = 25 halból állt.

Megjegyzés: Dirac szerint az eredmény -2 hal! Ha ebből elveszünk 1 halat (-2-1=-3) a megmaradt -3 hal három egyenlő részre osztható. Ha az elvett -1 hal után megmarad -2 hal, az eljárás a végtelenségig folytatható. Cambridge-ben mesélik azt az anekdotát, miszerint Dirac gondolatait éppen ez a játékos feladat vezette a lyukelmélet megalkotásához.

Feladat:

Három munkás a munkájukért kapott pénzt a következőképpen osztotta el az első összeg 1/2-ed részét és még 21 lejt, a második az első összegének 1/2-ed részét és még 21 lejt, míg a harmadik a második pénzének az 1/2-ed részét és még 21 lejt kapott. Hány lejt kapott külön-külön mindegyik?

Megoldás:



az eredeti pénzösszeg

két részre osztjuk és az első részből fizetjük ki sorra a második és harmadik munkást, illetve az első munkás 21 lejes pótlékát. Jelöljük ezt a pótlékot ■-al és legyen az értéke 4xb.

ez az első munkás fizetése, amelyet elosztunk újból két részre.

ebből ismét elveszünk egy 21 lejes mennyiséget és ehhez adjuk

ez a második munkás fizetése, amelyet újra két részre osztunk.

ebből elveszünk 21 lejt és ide pótoljuk

ez a harmadik munkás fizetése és ezzel az első „rész" elfogyott.

A továbbiakban jelöljük -t a-val; ekkor a gráf a következő lesz:

8a

4a+4b 4a–4b

2a+2b+4b 2a+2b

a+b+2b+4b a+b+2b

Tehát felírható a következő egyenlet:

8a = (4a+4b) + (2a+2b+4b) + (a+b+2b+4b)

ahol: 1*) 4a+4b -> az első munkás fizetése

2*) 2a+2b+4b -> a második munkás fizetése

3*) a+b+2b+4b -> a harmadik munkás fizetése

vagyis 8a =7a+17b => 8a-7a = 17b+7a-7a => a = 17b;

de 4b = 21 => b = 21/4, így a = 21·17/4

Ekkor 1*) 4a+4b = 17·21+21 =378 lej

2*) 2a+6b =2·17·21/4+6·21/4 = 210 lej

3*) a+7b=21·17/4+7·21/4=126 lej

Ilyen módon alkalmazva a gráfelméletet, bizonyos gyakorlatok, feladatok a természetüknél fogva új megvilágításba kerülnek. A feladat is, a megoldás is érthetőbbé válik. Remélem, hogy a cikk áttanulmányozása után, a tanulók különböző feladatmegoldási módszerek közötti „rokonságot", analógiát is felfedezik majd!

PÁLHEGYI-FARKAS LÁSZLÓ