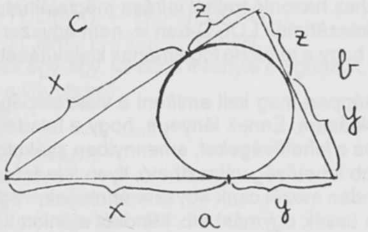
A háromszög oldalainak egy transzformációjáról

Gondolom, sokan elhiszik, hogy egy-egy feladat megoldását megkönnyíti, ha egyetlen fogással rögtön az elején kezelhetőbb problémát csinálunk belőle. Nem árt ismernünk ilyen fogásokat, melyek segítségünkre lehetnének ilyen esetben, ha pedig valamelyiket több feladatnál is használni tudjuk, Pólya György nyomán módszernek nevezhetjük azt. A következő ismert egyszerű fogással számos olyan egyenlőtlenséget módszeresen legyengíthetünk, amelyekben egy háromszög oldalai szerepelnek.

Legyenek egy háromszög oldalai a, b, és c. Ekkor tekintsük a háromszögbe írt kör oldalakkal való érintési pontjait. Ezek olyan szakaszokra osztják a háromszög oldalait, hogy a=x + y, b= y + z, c= x + z.



(Hiszen mint tudjuk, egy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőek.) A háromszög oldalainak ezen transzformációját alkalmazzuk a következő példákban.

1. példa

Legyen egy háromszög félkerülete s, oldalai a, b és c. Igazoljuk, hogy

$$8(s-a)(s-b)(s-c) \le abc \qquad (1)$$

Megoldás:

Legyen

$$a = x + y,\ b = y + z,\ c = x + z,$$

ahol x,y és z az előbb említett pozitív számok. Ekkor

$$s = x + y + z.$$

Így

$$8(x+y+z-x-y)(x+y+z-y-z)(x+y+z-x-y) \le (x+y)(y+z)(x+z).$$

Vagyis

$$8xyz \le (x+y)(y+z)(x+z),$$

ami egy jól ismert egyenlőtlenség. Az első osztályos gimnáziumi anyagban is alkalmazni szokták. Az egyenlőtlenséget könnyen igazolhatjuk, ha háromszor alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\sqrt{x \cdot y} \le \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{y \cdot z} \le \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt{x \cdot z} \le \frac{x+z}{2}.$$

Ezeket összeszorozva, majd rendezve megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha x = y = z, vagyis ha a = b = c.

2. példa

Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{s} < \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \le \sqrt{3} \cdot s$$

(Ahol s a háromszög félkerülete; a, b, c a háromszög oldalai.) [1]

Megoldás:
Alkalmazzuk a háromszög oldalainak előbb leírt transzformációját. A következő eredményt kapjuk:

$$\sqrt{x+y+z} < \sqrt{z} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{3\,(x+y+z)}\ ,$$

Először a bal oldalt igazoljuk négyzetre emeléssel:

$$x+y+z < z+x+y+2\sqrt{x\cdot y}+2\sqrt{x\cdot z}+2\sqrt{y\cdot z}\,.$$

Ami nyilván igaz, mert a négyzetgyökös kifejezések pozitívak. Nézzük most a jobb oldali egyenlőtlenség igazolását!

$$z+x+y+2\sqrt{x\cdot y}+2\sqrt{x\cdot z}+2\sqrt{y\cdot z} \le 3(x+y+z)$$

$$2\sqrt{x\cdot y}+2\sqrt{x\cdot z}+2\sqrt{y\cdot z} \le 2x+2y+2z$$

Alkalmazzuk háromszor a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, ugyanúgy, mint [1]-nál. Ezeket összeadva és rendezve épp a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. Egyenlőség akkor, ha $x = y = z$, tehát $a = b = c$ esetén.

3. példa

Legyen s egy háromszög félkerülete, a, b és c a háromszög oldalai. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} \ge \frac{9}{s}. \quad [1]$$

Megoldás:
Szokásunknak megfelelően legyen $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$.
Ekkor

$$\frac{1}{x+y+z-x-y}+\frac{1}{x+y+z-y-z}+\frac{1}{x+y+z-x-z} \ge \frac{9}{x+y+z}$$

Vagyis

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}$$

ebből

$$\frac{x+y+z}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

Ez pedig éppen a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség x, y és z-re. Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = z$, vagyis $a = b = c$ esetén.

4. példa

Igazoljuk, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$\frac{1}{4} < \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \le \frac{1}{3}.$$

(XVII. Össz-orosz matematikai olimpia, 1990/91. Mat. v Škole 91/2. 41. oldal)

Megoldás:
Az ismert $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$ transzformációt végrehajtva:

$$\frac{1}{4} < \frac{(x+y)\,(y+z)+(y+z)(x+z)+(x+z)(x+y)}{(2(x+y+z))^2} \le \frac{1}{3}$$

Először a bal oldalt igazoljuk.

$$\frac{1}{4}\cdot 4\cdot(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz) < (x+y)(y+z)+(y+z)(x+z)+(x+z)(x+y).$$

Elvégezve a műveleteket, rendezve a következő eredményt kapjuk: $0 < xy + yz + xz$. Ez pedig nyilván teljesül, hiszen x,y és z pozitív.

Az egyenlőtlenség bal oldalát tehát igazoltuk. Az is látható, hogy az $\frac{1}{4}$ értéket soha nem érheti el az eredeti tört.

Nézzük most a jobb oldali egyenlőtlenséget:

$$(x+y)(y+z)+(y+z)(x+z)+(x+z)(x+y)\le\frac{1}{3}\cdot 4\cdot(x+y+z)^2$$

Elvégezve a műveleteket és rendezve az alábbi eredményt kapjuk:

$$0\le x^2+y^2+z^2-xy-yx-xz.$$

Ami ismert egyenlőtlenség, s például 2-vel megszorozva a következő alakra hozzuk:

$$0\le 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz,$$

ez pedig nem más, mint

$$0\le(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2.$$

Ez nyilván teljesül, ebből következik, hogy az eredeti egyenlőtlenség jobb oldala is teljesül. Egyenlőség pontosan akkor, ha $x=y=z$, tehát $a=b=c$ esetén.

5. példa

Egy háromszög oldalai a, b, c hosszúságúak. Bizonyítsuk be, hogy

$$|(a-b)(b-c)|+|(b-c)(c-a)|+|(c-a)(a-b)|<s^2, \qquad (2)$$

ahol s a háromszög kerületének fele.

Megoldás:

Legyen az előzőekhez hasonlóan $a=x+y$, $b=y+z$, $c=x+z$.

Nyilván feltehetjük, hogy $x\ge y\ge z$. Ekkor $a-b$ nem negatív, míg $b-c$ és $c-a$ nem pozitív. Így

$$|(x-z)(y-z)|+|(y-x)(z-y)|+|(z-y)(x-z)|<(x+y+z)^2.$$

Ebből az előző megállapításunkat felhasználva:

$$(x-z)(x-y)+(x-y)(y-z)+(y-z)(x-z)<(x+y+z)^2.$$

Elvégezve a műveleteket és rendezve, a következőket kapjuk:

$$0<2y^2+xy+yz+5xz.$$

Ez pedig minden pozitív x, y, z-re teljesül.

Az is látszik belőle, hogy az eredeti feladatban egyenlőség nem állhat fenn. Erre más módon *Pintér Lajos* tanár úr mutatott rá az irodalomjegyzékünkben feltünetett művében (2).

6. példa

Jelölje a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát! Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

(XXIV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1983.) (3)

Megoldás:

Alkalmazzuk az $a=x+y$, $b=y+z$, $c=x+z$ transzformációt!

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(x+z)(x-z)\ge 0.$$

Ebből a következőket kaphatjuk:

$$(xy^3+yz^3+zx^3)(x+y+z)\ge xyz(x+y+z)^2. \quad (2)$$

Most pedig alkalmazzuk a *Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz*-féle egyenlőtlenséget az $a_1=y\sqrt{x\cdot y}$, $a_2=z\sqrt{y\cdot z}$, $a_3=x\sqrt{z\cdot x}$, $b_1=\sqrt{z}$, $b_2=\sqrt{x}$, $b_3=\sqrt{y}$ számokra!

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+c_1c_2)^2$$

Elvégezve a behelyettesítéseket és rendezve éppen [2]-t kapjuk.

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha

$$a_1=\lambda\cdot b_1,\quad a_2=\lambda\cdot b_2,\quad a_3=\lambda\cdot b_3.$$

Tehát

$$\frac{y\sqrt{x\cdot y}}{\sqrt{z}}=\frac{z\sqrt{y\cdot z}}{\sqrt{z}}=\frac{x\sqrt{z\cdot x}}{\sqrt{y}}$$

ebből pedig könnyen következik, hogy $x=y=z$, azaz $a=b=c$. Egyenlőség tehát pontosan a szabályos háromszög esetén teljesül.

E feladatot azok a tanulók is megoldhatják, akik kevésbé képzettek, mint hogy a felhasznált nevezetes egyenlőtlenséget ismerjék. A megoldás befejezésének más módja is van. Induljunk ki az előző

$(xy^3 + yx^3 + zx^3)(x + y + z) \geq xyz(x + y + z)^2$-ből, ezt egyszerűsítve $xy^3 + yx^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z)$, majd nullára rendezve $xy^3 + yz^3 + zx^3 - x^2yz - xy^2z - xyz^2 \geq 0$.

A tanulók vagy rájönnek a következő átalakításra, vagy nem. Az utóbbi esetben a tanárra vár a feladat, hogy rávezesse a tanulókat arra, hogy az előző egyenlőtlenség további alakja éppen:

$xy(y - z)^2 + yz(z - x)^2 + xz(x - y)^2 \geq 0$. Ez pozitív x,y,z-re mindig teljesül. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x = y = z$, ebből $a = b = c$ következik, tehát pontosan szabályos háromszög esetén áll fenn egyenlőség az eredeti egyenlőtlenségben.

A háromszög oldalainak e transzformációját egy sor további hasonló feladat megoldásában alkalmazhatjuk sikerrel. Természetesen az előzőekben említett példák és a következő feladatok más módokon is megoldhatók.

Feladatok

1. Legyenek a, b és c egy háromszög oldalai. Igazoljuk, hogy

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc. \quad (4)$$

2. Jelölje a, b és c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \leq \frac{1}{2}$$

(Magyar felvételi feladat, 1991)

3. Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3a\,b\,c.$$

VI. Nemzetközi Matematikai Olimpia, 1964. Pl. *Molnár Emil:* Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947-1970. 2. átdolgozott kiadás. Tankönyvkiadó, Bp., 1980. 171. feladat)

4. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalai és s a félkerülete, akkor

$$\frac{a \cdot b}{s - c} + \frac{b \cdot c}{s - a} + \frac{c \cdot a}{s - b} \geq 4 \cdot s.$$

(KÖMAL 88/8-9., F 2683)

5. Legyenek a, b, c egy háromszög oldalai. Igazoljuk, hogy

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + 3.$$

(KVANT 88/10. M1107, ill. (4))

6. Jelentse a, b és c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Kürschák József: Matematikai Tanulóverseny, 1972. *Surányi János:* Matematikai versenytételek. III. rész. Tankönyvkiadó, Bp., 1992.)

IRODALOM

(1) *Hajnal Imre–Nemetz Tibor–Pintér Lajos:* Matematika III-IV. osztály. Tanári kézikönyv. Tankönyvkiadó, Bp., 1985, 219. p.

(2) *Pintér Lajos:* Egy lépéssel tovább. Polygon, 1991. június (I/1. kötet), 69-71. p.

(3) *Fried Katalin – Pogáts Ferenc:* Középiskolai matematikai versenyek 1980-1984. Tankönyvkiadó, Bp., 1986. 469-470. p.

(4) *Roman Alekszejev – Lev Kurljandcsik:* Sztoronü treugolnyika. Kvant, 1993/9-10. 69-70. p.

CSETE LAJOS