Mértan, geo-metria, geometria

A geometriáról és annak oktatásáról alkotott véleményemet jól tükrözik azok a szakdolgozatok, amelyeket a matematikatanár szakosoknak e témában vezettem az elmúlt években.

A módszertani oktatás során az első kérdéseim közé tartozik, hogy mivel foglalkozik a matematika, azaz „mi az, aminek tudására szomjazol?" (1) Erre a kérdésre – mind matematikai, mind didaktikai szempontból – érdekes és megfontolandó választ kaphatunk *Rényi Alfréd* Dialógusok a matematikáról című írásából. Mivel a hallgatókat elég nehéz „belelkesíteni" az olvasásba, ezért eleinte az első órán magam olvastam fel a műből szemelvényeket, aminek következtében a különböző reakciókra nem tudtam eléggé odafigyelni. Ekkor az egyik hallgatóm elvállalta, hogy párbeszédes formában magnóra mondatja a dialógus egy lehetséges változatát és festett, illetve animációs diaképeket szerkeszt hozzá. (2) Miután pedig megfogalmazódik, hogy a matematika nagyrészt a „számok és a formák tudományának" tekinthető, elkezdhetjük a dolgot pontosítani.

A tanításban a formák globális felismerése, azonosítása után következik:

a) a számlálás: hány csúcsa, éle.. van ennek a poliédernek, poligonnak...?

b) az összehasonlítás – mérés: oldalaik, szögeik egyenlők-e? (egymásra helyezés, áthajtás); hányszor fér rá? – van-e közös egység? (gimn.); kölcsönös helyzet: ha oldalait meghosszabbítom, metszik-e egymást? ("Úgy néz ki, hogy 'később' sem metszik egymást...") Az általános iskolában a diákoknak „a végtelenbe nyúló egyenes és sík" fogalmáról alkotott képet nehéz, hosszadalmas munkával alakítjuk ki.

Meggyőződésem, hogy a gyerekeket más geometriák alapjaival is meg kell ismertetnünk ahhoz, hogy később az absztrakció még magasabb szintjére, az axiomatizáláshoz is könnyebben el tudjanak jutni. Hangsúlyozni szeretném, hogy nem a nem-euklideszi geometriák tanításáról van szó, hanem anak érzékeltetéséről, hogy az absztrakciónak csak egyik lehetséges módja az, ha a „kicsiben" megtapasztalt geometriánkat euklideszi módon terjesztjük ki a „végtelenbe". Tágabb környezetünk, a Föld gömb alakú, amiről a gyerekek földrajzórán tanulnak; a Balaton „sík" vize felett végignézve láthatják is, hogyan tűnnek fel a hajók. A történelem során már a görögöknél is felmerült ez a kérdés, sőt egészen jó mérési eredményeik is születtek *(Eratoszthenész)* a Föld sugarának meghatározására. (3) A Balatonon, a tengeren, az óceánon mit jelent a két pontot összekötő egyenes út? Majd a rajzgömb készlettel (*Lénárt István* által tervezett átlátszó és fehér gömbök, gömbi vonalzó, körző, fólia-félgömb-rajzlap) végzett manipulációk, feladatok (4) után felvethető a kérdés: „*Mit érdemes* egyenesnek nevezni a gömbfelületen érvényes geometriában?" (5) S ha eljutottunk annak tudatosításáig, hogy a szemléletes „egyenes" szó-(fogalom) nem is olyan „természetes"; a rá vonatkozó „nyilvánvaló" ismereteink – két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest; két különböző egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet stb. – nem is olyan megingathatatlanok, akkor egy teljesen mesterséges geometriai modell megismertetése sem olyan bonyolult a gimnáziumi tanulók számára. A gömbfelülettel való foglalkozás után az ún. Poincaré-féle gömbmodell ismertetését tartom célszerűnek. Hangsúlyozni szeretném: nem gömbi, illetve nem hiperbolikus geometriát szeretnék tanítani a középiskolában. Csak annak a lélektani követelménynek kellene eleget tennünk a tanítás során, hogy ne csak valamely fogalom tartalmát, hanem annak határait is mutassuk meg. A sok-sok példából a fogalom tartalma lesz a közös, az ellenpéldák pedig a fogalom határait adják meg. (Mi nem az, van nem-olyan is.)

Míg az illeszkedési axiómák megfogalmazásához már a gömbi geometria alapjainak megismerésével eljuthatunk, a mérés és az egybevágóság mibenlétének rádöbbentésére Poincaré félgömbmodelljét tartom megfelelőnek, ahol a „sík" pontjai egy nyílt félgömbfelület pontjai. Míg a gömbnél ilyen kérdés szerepelt: „Mit érdemes egyenesnek tekinteni?" – itt „önkényesen" definiáljuk: a határkör síkjára merőleges síkok által kimetszett félköröket *tekintjük* egyeneseknek. A továbblépés: mely szakaszokat *érdemes* itt egyenlőknek nevezni?

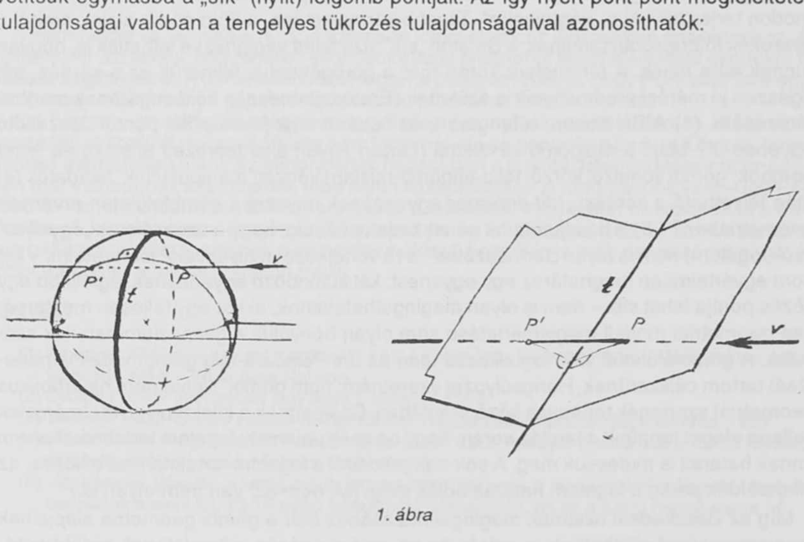
Bár a különböző axiomatikus felépítések egyenrangúak, a megalapozásukban eltérések lehetnek. A szakasz-, illetve szögegyenlőség a gyerekek számára az egymásra helyezhetőséget jelenti. Ennek absztraktabb megfogalmazása az egymásba transzformálhatóság, még „matematikusabban": egy ekvivalencia reláció létezésének biztosítása egy transzformációcsoport segítségével. (Azok az egyenlő szakaszok (szögek), amelyeket ezek a transzformációk egymásba visznek.) Az egyenlőség így a mozgáscsoport invariánsa. Lásd *F. Klein* erlangeni programját! (6)

Tehát a „Mit érdemes egyenlőnek tekinteni?" kérdéskörrel rávehetjük a gimnazistákat az eddigi „mértan" felülvizsgálatára. (7) A gömbi geometriában is helyénvaló az „egymásbamozgathatóság", de a tényleges „kivitelezés" további gondolkodásra serkenthet. A síkgeometriában általában észrevételeztettük a tengelyes tükrözés generáló szerepét, azaz hogy a síkmozgások két tengelyes tükrözés egymásutánjával *is* előállíthatók. A tengelyes tükrözés megfelelő pontpárjait pedig úgy is megkaphatjuk, ha a „papírsíkot" a tengely mentén áthajtjuk, és a fedőpontokat átjelöljük. A gömbi tengelyes tükrözés esetén a „tengely" (főkör) mentén a „félsíkokat" (félgömböket) bár nehézkesen, de egymásra „horpaszthatjuk", ha a félgömbfólia elég rugalmas. Ekkor azonban a hozzárendelésnek egy kézenfekvőbb módja *is* szembeötlik: a főkör síkjára merőleges vetítősugarakkal vetítsük egymásba a félgömbök pontjait. *(1. ábra)*

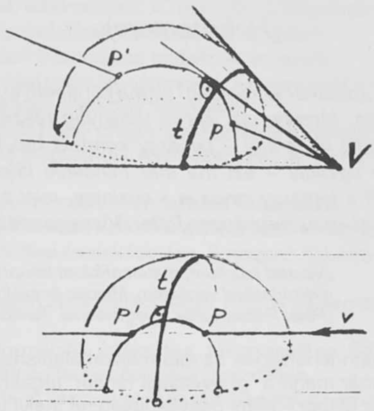
Ez a „fizikai" megfeleltetés átvihető a Poincaré-féle félgömbmodellre minden kettősviszony, illetve logaritmus nélkül. Vegyünk szemügyre egy „egyenest" (az alapkör síkjára merőleges félkör)t, lásd: (2. ábra)

Lásd még a *Kalamár Gábor* munkájában látható fényképsorozatot. (8)

Ha *t* a gömb főköre, akkor a *t* mentén a gömböt érintő henger alkotóival párhuzamos sugarakkal *(v)*, különben pedig a *t* mentén érintő kúp csúcsából *(V)* induló sugarakkal vetítsük egymásba a „sík" (nyílt) félgömb pontjait. Az így nyert pont-pont megfeleltetés tulajdonságai valóban a tengelyes tükrözés tulajdonságaival azonosíthatók:



1. ábra



2. ábra

a) *t* pontjait pontonként önmagához rendeltük – „*tengely*";

b) a *t* által határolt „félsíkokat" felcseréli *involutív* módon, azaz ha a *P* pont képe *P'*, akkor *P'*-höz *P*-t rendeli;

c) a vetítősugarakra illeszkedő, az alapsíkra merőleges síkok olyan „egyeneseket" metszenek ki a félgömbből, amelyek önmagukra képződnek le, azaz létezik a *t* tengelytől különböző (rá merőleges) egyenessereg, amely invariáns: *PP'* egyenes képe önmaga.

Így egy magától értetődő leképezést mutathatunk be a modellen. Az ezek egymásutánjával felépített transzformációk halmazáról láthatjuk, hogy az az egybevágóságoknak felel meg. Ezért, ha a szemmel láthatóan különböző hosszúságú köríveket ("szakaszokat") egymásba vetíthetjük, akkor azokat egyenlőknek *érdemes* tekinteni.

Tehát a hiperbolikus sík egy lehetséges matematikai modellje a szemléltető, modellező geometria szintjén is megismerhető, és ezzel az euklideszi geometria egyre absztraktabb fogalmai munkálhatók ki. És fordítva: ne tekintsük csupán játéknak, „lenézett manipulációnak" azt, ha a kisiskolások két pont, illetve két egypontból kiinduló félegyenes szimmetriatengelyének meghatározását a papír áthajtásával végzik el. Az egymásrahelyezés, áthajtás a későbbi absztrakció egy lehetséges lépcsőfoka, hiszen a geometriában az axiómák a merev test mozgásának leglényegesebb tulajdonságait fogalmazzák meg. (9)

JEGYZET

(1) *Rényi Alfréd:* Dialógusok a matematikáról. Typotex, Budapest, 1994.
(2) *Hadrik Adrien:* Szókratészi dialógus. Szakdolgozat, 1989.
(3) *Kalamár Gábor:* a) A gömbölyű Föld, b) A félgömb-sík. Szakdolgozat, 1994.
(4) *Csókáné Salakta Judit:* A gömbgeometria iskolai oktatásáról. Szakdolgozat, 1983.
(5) *Móroczné Kóródi Márta:* A gömbi geometria elemei a középiskolában. Szakdolgozat, 1993.
(6) *Soós Enikő:* A csoportelmélet alkalmazása a geometriai transzformációk körében. Szakdolgozat, 1989; illetve *Fatalin Lászlóné:* Kaleidoszkóp a geometria tanításáról. = Iskolakultúra, 1993. 23. sz.
(7) *Csörnyi Rita:* Nem-euklideszi geometriák a középiskolában. Szakdolgozat, 1993.
(8) *Kalamár Gábor:* i.m.
(9) *Hajós György:* Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

HOLLAI MÁRTA